Εφαρμογή του Αναλυτικού Προγράμματος και των Εγχειριδίων στη Μέση Εκπαίδευση

Σωτήρης Λοϊζιάς

Θεσσαλονίκη, 29 Απριλίου 2023

Πίνακας Περιεχομένων

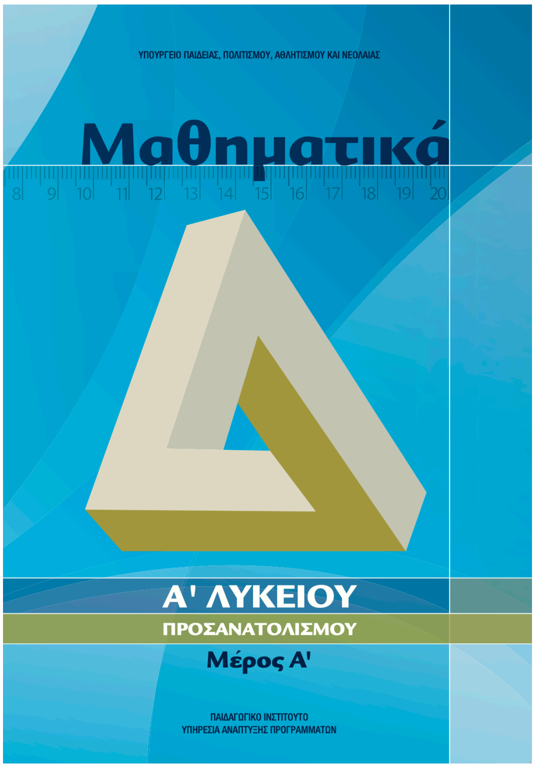
Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή

Στην υποενότητα αυτή της παρουσίασης θα ασχοληθούμε με τους δείκτες επιτυχίας και δείκτες επάρκειας που αφορούν την ενότητα «Πραγματικοί αριθμοί».

Η συγκεκριμένη ενότητα είναι η πρώτη που διδάσκεται στην Α΄ τάξη Λυκείου Προσανατολισμού.

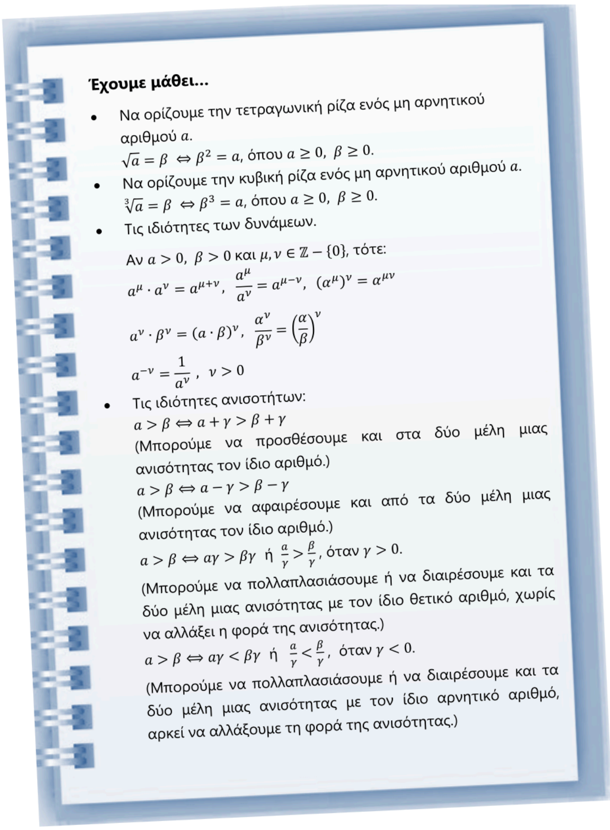
https://archeia.moec.gov.cy/sm/268/a_lyk_mathimatika_pros_1.pdf



Πραγματικοί Αριθμοί - Περιεχόμενα

- Η έννοια της νιοστής ρίζας
- Ιδιότητες νιοστής ρίζας
- Δυνάμεις με ρητό εκθέτη
- Μετατροπή άρρητου παρονομαστή σε ρητό
- Ιδιότητες διάταξης

Ενδεικτικές περίοδοι διδασκαλίας: 15



Έχουμε μάθει...

- Να ορίζουμε την τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a.
  $\sqrt{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^2 = a$, όπου $a \geq 0,\ \beta \geq 0$.
- Να ορίζουμε την κυβική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a.
  $\sqrt[3]{a} = \beta \Leftrightarrow \beta^3 = a$, όπου $a \geq 0,\ \beta \geq 0$.
- Τις ιδιότητες των δυνάμεων.
  Αν $a > 0,\ \beta > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{Z} - \{0\}$, τότε:
  $a^\mu \cdot a^\nu = a^{\mu+\nu},\ \dfrac{a^\mu}{a^\nu} = a^{\mu-\nu},\ (\alpha^\mu)^\nu = \alpha^{\mu\nu}$
  $a^\nu \cdot \beta^\nu = (a \cdot \beta)^\nu,\ \dfrac{\alpha^\nu}{\beta^\nu} = \left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^\nu$
  $a^{-\nu} = \dfrac{1}{a^\nu},\ \nu > 0$
- Τις ιδιότητες ανισοτήτων:
  $a > \beta \Leftrightarrow a + \gamma > \beta + \gamma$
  (Μπορούμε να προσθέσουμε και στα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό.)
  $a > \beta \Leftrightarrow a - \gamma > \beta - \gamma$
  (Μπορούμε να αφαιρέσουμε και από τα δύο μέλη μιας ανισότητας τον ίδιο αριθμό.)
  $a > \beta \Leftrightarrow a\gamma > \beta\gamma$ ή $\frac{a}{\gamma} > \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma > 0$.
  (Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ανισότητας.)
  $a > \beta \Leftrightarrow a\gamma < \beta\gamma$ ή $\frac{a}{\gamma} < \frac{\beta}{\gamma}$, όταν $\gamma < 0$.
  (Μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε ή να διαιρέσουμε και τα δύο μέλη μιας ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, αρκεί να αλλάξουμε τη φορά της ανισότητας.)

Πραγματικοί Αριθμοί - ΔΕΕ

ΓΝΩΣΤΙΚΟ ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΡΙΘΜΟΙ)			
ΤΑΞΗ: Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ			
ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΙΤΥΧΙΑΣ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ	**ΔΕΙΚΤΕΣ ΕΠΑΡΚΕΙΑΣ ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΑ ΔΙΔΑΚΤΕΑ ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΕΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ**		
Οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:	*Ο εκπαιδευτικός αναπτύσσει δραστηριότητες, ώστε οι μαθητές και οι μαθήτριες να είναι σε θέση να:*	*Διδακτέα: Πληροφορίες, Έννοιες, Δεξιότητες, Στρατηγικές/Τρόπος Σκέψης*	
		Επίπεδα Δραστηριοτήτων	*Μαθηματικές Πρακτικές*
1. **Έννοια-ιδιότητες νιοστής ρίζας** (Αρ6.2**) Ορίζουν την έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού α και αποδεικνύουν τις ιδιότητες ριζών, όταν $\nu \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}^+$.	1.1. Ορίζουν τη νιοστή ρίζα πραγματικού μη-αρνητικού αριθμού α ($\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\nu \in \mathbb{N}$). **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό ✓ Ορισμός τετραγωνικής ρίζας μη-αρνητικού αριθμού α $(\alpha \geq 0)$ ✓ Ορισμός κυβικής ή τρίτης ρίζας μη-αρνητικού αριθμού α $(\alpha \geq 0)$ **Νέες Έννοιες** ✓ Νιοστή ρίζα μη αρνητικού πραγματικού αριθμού α ($\sqrt[\nu]{\alpha}$, $\nu \in \mathbb{N}$).	**Παραδείγματα:** *Ορισμός νιοστής ρίζας* • Να γράψετε μια ισοδύναμη πρόταση για τους πραγματικούς αριθμούς x, y και z: (α) $x = \sqrt[5]{2}$ (β) $y = \sqrt[7]{3}$ (γ) $z = \sqrt[3]{10}$ • Ποιος αριθμός, όταν υψωθεί στη 10^{η} δύναμη, μας δίνει 3; Να δώσετε την ακριβή μορφή του αριθμού. Με χρήση της υπολογιστικής μηχανής να γράψετε τον αριθμό κατά προσέγγιση τριών δεκαδικών ψηφίων.	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παραδείγματα:** (α) Να ερμηνεύσετε με λόγια τον πραγματικό αριθμό $\alpha = \sqrt[5]{200}$. (β) Να εκτιμήσετε μεταξύ ποιων δύο διαδοχικών ακέραιων αριθμών βρίσκεται το $\alpha = \sqrt[5]{200}$. Να αναφέρετε σε ποιο από τους δύο αριθμούς βρίσκεται πιο «κοντά», αιτιολογώντας την απάντησή σας. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς ο ορισμός της νιοστής ρίζας με βοηθά στην ερμηνεία του αριθμού $\alpha = \sqrt[5]{200}$;

https://mathm.schools.ac.cy/index.php/el/mathimatika/analytiko-programma

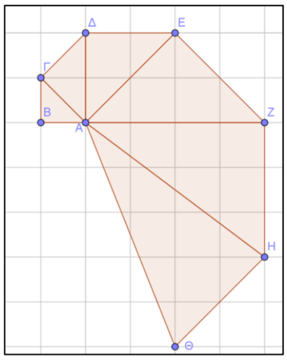
Πραγματικοί Αριθμοί - ΔΕΕ

			• Ποιοι μαθηματικοί συμβολισμοί είναι σημαντικοί σε εκτίμηση του $a=\sqrt[5]{200}$; • Πώς θα ελέγξω την ορθότητα των απαντήσεών μου;
	1.2. Αποδεικνύουν τις ιδιότητες νιοστών ριζών μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας πραγματικού μη αρνητικού αριθμού $\sqrt[\nu]{a},\ \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό ✓ Ιδιότητες δυνάμεων ✓ Αν $a>0, \beta>0$ και μ, ν $\in \mathbb{Z}$, $\mu,\nu \neq 0$, τότε: ➢ $a^{\mu}\cdot a^{\nu}=a^{\mu+\nu}$ ➢ $\frac{a^{\mu}}{a^{\nu}}=a^{\mu-\nu}$ ➢ $(a^{\mu})^{\nu}=a^{\mu\nu}$ ➢ $a^{\nu}\cdot\beta^{\nu}=(a\cdot\beta)^{\nu}$ ➢ $\frac{a^{\nu}}{\beta^{\nu}}=\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\nu}$ **Νέες Έννοιες** ✓ Ιδιότητες ριζών: Αν $a,\beta \geq 0$ και $\mu,\nu\ >0$: ➢ $\sqrt[\nu]{a^{\nu}}=a$ ➢ $\sqrt[\nu]{a\beta}=\sqrt[\nu]{a}\sqrt[\nu]{\beta}\sqrt[\nu]{\frac{a}{\beta}}=\frac{\sqrt[\nu]{a}}{\sqrt[\nu]{\beta}}$ ➢ $\sqrt[\nu]{\sqrt[\mu]{a}}=\sqrt[\nu\mu]{a},$	**Παράδειγμα:** *Απόδειξη ιδιοτήτων νιοστών ριζών και εφαρμογή τους* • Αν $a\geq 0$ και ν,κ θετικοί ακέραιοι, να αποδείξετε ότι: i. $\sqrt[\nu]{a^{\nu}\cdot\beta}=a\cdot\sqrt[\nu]{\beta}$ ii. $(\sqrt[\nu]{a})^{\kappa}=\sqrt[\nu]{a^{\kappa}}$ • Να βρείτε ακέραιους x, y ώστε να ισχύει $\sqrt[5]{192}=x\cdot\sqrt[5]{y}$.	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Να συγκρίνετε τους πραγματικούς αριθμούς $A=\sqrt[3]{2}$ και $B=\sqrt[10]{10}$, αιτιολογώντας την απάντησή σας. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς μπορώ να αναπαραστήσω τα δεδομένα του προβλήματος με ισοδύναμο τρόπο; • Γιατί δεν είναι συγκρίσιμοι οι αριθμοί, όπως έχουν δοθεί; • Ποια ιδιότητα θα με βοηθούσε ώστε να έχουμε τους δύο αριθμούς με τον ίδιο δείκτη (ή τον ίδιο εκθέτη);

	➢ $\sqrt[\nu\rho]{\alpha^{\mu\rho}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$		
2. **Δυνάμεις με ρητό εκθέτη** (Αρ6.4) Ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και παριστάνουν δύναμη με εκθέτη ρητό αριθμό ως ρίζα και αντίστροφα.	2.1 Ορίζουν τη δύναμη μη-αρνητικού αριθμού α με ρητό εκθέτη $\frac{\mu}{\nu}$, όπου $\mu, \nu \in \mathbb{N}$, ως $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$ και μετατρέπουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$, $\alpha > 0$ και $\mu, \nu \in \mathbb{N}$. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού α ($\sqrt[\nu]{\alpha}, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Ιδιότητες ριζών **Νέες Έννοιες** ✓ Δύναμη μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού α με ρητό εκθέτη ($\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\alpha > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Νιοστή ρίζα μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού α, όπου α δύναμη με εκθέτη μ ($\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}, \nu \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$). **Σημείωση** ✓ Ειδικά, ορίζουμε $\alpha^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha}$, $\alpha \geq 0, \nu \in \mathbb{N}$.	**Παραδείγματα:** *Ορισμός δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη* • Να γράψετε ισοδύναμες προτάσεις για τις πιο κάτω δυνάμεις, όταν $x > 0$: (α) x^3 (β) x^{-3} (γ) $x^{\frac{1}{3}}$ (δ) $x^{-\frac{1}{3}}$ • Να υπολογίσετε τους αριθμούς: (α) $8^{\frac{2}{3}}$ (β) $9^{-\frac{1}{2}}$ (γ) $\left(\frac{4}{25}\right)^{-\frac{3}{2}}$ • Να εκφράσετε το γινόμενο $2^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{3}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς και να κατανοήσω καλύτερα τις ιδιότητες των ριζών.* **Παραδείγματα:** Ένας μαθητής έγραψε τον αριθμό $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}, \alpha > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ με δύο διαφορετικούς τρόπους όπως φαίνεται πιο κάτω: i. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = (\alpha^{\mu})^{\frac{1}{\nu}}$ ii. $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}$ Να γράψετε τι «προσφέρει» ο κάθε τρόπος γραφής και σε ποιες ισοδύναμες ιδιότητες μπορούμε να καταλήξουμε. Να χρησιμοποιήσετε τον αριθμό $8^{\frac{2}{3}}$, για να στηρίξετε τον ισχυρισμό σας και να αποφασίσετε ποιος από τους δύο τρόπους γραφής δίνει απλούστερο αποτέλεσμα. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς γράφεται ο αριθμός $x^{\frac{1}{\nu}}, x > 0$; • Πώς γράφεται ο αριθμός $(x^{\mu})^{\frac{1}{\nu}}$; • Πώς γράφεται ο αριθμός $\left(\alpha^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu}$;
	2.2. Μετατρέπουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη της μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$	**Παραδείγματα:**	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη**

	στη μορφή $\sqrt[\nu]{a^{\mu}}$, όπου a μη-αρνητικός πραγματικός αριθμός και $\nu \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{R}$ και αντίστροφα. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a ($\sqrt[\nu]{a}, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη ✓ Ιδιότητες τετραγωνικών και κυβικών ριζών. **Νέες Έννοιες** ✓ Δύναμη μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a με ρητό εκθέτη ($a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$) ✓ Νιοστή ρίζα μη-αρνητικού πραγματικού αριθμού a, όπου α δύναμη με εκθέτη μ ($\sqrt[\nu]{a^{\mu}}, \nu \in \mathbb{N}, \mu \in \mathbb{N}$)	*Μετατροπή δυνάμεων με ρητό εκθέτη της μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ στη μορφή $\sqrt[\nu]{a^{\mu}}$* • Να εκφράσετε σε μορφή δύναμης τα πιο κάτω: (α) $\sqrt[3]{a}$ (β) $\sqrt[4]{\beta^3}$ (γ) $\sqrt[6]{\gamma^4}$ • Να εκφράσετε στη μορφή $\sqrt[\nu]{a^{\mu}}$ τα πιο κάτω: (α) $x^{\frac{4}{3}}$ (β) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[4]{a}$ (γ) $\left(2^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\frac{\kappa}{\lambda}}$ (δ) $3^{\frac{\mu}{\nu}} \cdot 5^{\frac{\mu}{\nu}}$	*Χρησιμοποιώ την έννοια της νιοστής ρίζας, θετικού αριθμού υψωμένου σε δύναμη για να κατανοήσω ποσότητες και σχέσεις μεταξύ τους.* **Παραδείγματα:** Να ελέγξετε κατά πόσο οι πιο κάτω αριθμητικές παραστάσεις είναι ισοδύναμες μεταξύ τους: (α) $x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{4}{3}}$ και $x^2, x > 0$. (β) $\left(a^{\frac{2}{5}}\right)^{\frac{5}{3}}$ και $\sqrt{a^3}$. (γ) $5^{\frac{3}{4}} \cdot 2^{\frac{3}{4}}$ και $\sqrt[4]{10^3}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ισχύει η ιδιότητα $a^{\mu} \cdot a^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$ όταν τα μ και ν είναι ρητοί; • Ισχύει η ιδιότητα $(a^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$ όταν τα μ και ν είναι ρητοί;
3. **Μετασχηματισμός αριθμητικών παραστάσεων** (Αρ6.9) Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες	3.1. Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ιδιότητες ριζών **Νέες Έννοιες** ✓ Ισοδύναμες κλασματικές παραστάσεις με άρρητο και ρητό παρονομαστή	**Παραδείγματα:** *Μετατροπή παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.* • Να μετατρέψετε τις παραστάσεις $B = \frac{10}{\sqrt{2}}$ και $\Gamma = \frac{21}{2\sqrt{3}-\sqrt{5}}$ σε ισοδύναμές τους με ρητό παρονομαστή. • Αν $x, y > 0$ και $x \neq y$, να αποδείξετε ότι: ➢ $\frac{2+\sqrt{x}}{4-x} = \frac{1}{2-\sqrt{x}}$	**ΜΠ.3 Ανάπτυξη ισχυρισμών και κρίση του συλλογισμού άλλων** *Επεξηγώ την σκέψη μου, χρησιμοποιώντας μαθηματικές υποθέσεις και ορισμούς, για να αναπτύξω ισχυρισμούς.* **Παραδείγματα:** (α) Να εξηγήσετε γιατί οι πιο κάτω παραστάσεις είναι ισοδύναμες και να αναφέρετε τις διαφορές τους. i. $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}$ και $2 \cdot \sqrt[3]{3}$

παραστάσεις με ρητό παρονομαστή.	✓ Μετασχηματισμός παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.	➢ $\frac{x\sqrt{x}-y\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=x+y+\sqrt{xy}$	ii. $\frac{24}{\sqrt{11}-3}$ και $12\cdot(\sqrt{11}+3)$ (β) Πώς μπορείτε να βρείτε ισοδύναμη παράσταση με ρητό παρονομαστή με την $\frac{2\sqrt{3}}{6-\sqrt{18}}$; *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πότε δύο κλάσματα είναι ισοδύναμα; • Ποια γνωστή ταυτότητα είναι κατάλληλη να χρησιμοποιηθεί ώστε να απαλείψει τα ριζικά της μορφής $\alpha\pm\beta\sqrt{\gamma}$;
4. **Τιμή αριθμητικής παράστασης με ν −οστές ρίζες** (Αρ6.11) Εκτελούν πράξεις ριζών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων.	4.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και τους μετασχηματισμούς από αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να απλοποιούν παραστάσεις και να υπολογίζουν την τιμή τους. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $\alpha>0,\mu,\nu\in\mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Προτεραιότητα πράξεων	**Παραδείγματα:** *Υπολογισμός αριθμητικής τιμής παραστάσεων με τη χρήση του ορισμού δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη και τις ιδιότητες ριζών* • Να υπολογίσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης: $A=64^{\frac{1}{2}}-64^{\frac{1}{3}}+64^{\frac{1}{6}}$. • Να δείξετε ότι η παράσταση $A=\sqrt{12}+\sqrt{48}+\sqrt{108}$ μπορεί να πάρει τη μορφή: (α) $\kappa\sqrt{2}$ με $\kappa\in\mathbb{N}$ (β) $\sqrt{\lambda}$ με $\lambda\in\mathbb{N}$ • Να δείξετε ότι η παράσταση $A=\sqrt[3]{40}+\sqrt[3]{135}+\sqrt[3]{320}$ μπορεί να πάρει τη μορφή: (α) $\kappa\sqrt[3]{5}$ με $\kappa\in\mathbb{N}$ (β) $\sqrt[3]{\lambda}$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{N}$	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Να υπολογίσετε την περίμετρο και το εμβαδόν του πολυγώνου $AB\Gamma\Delta EZH\Theta A$ αν το κάθε ένα τετραγωνάκι έχει εμβαδόν ίσο με $1\ cm^2$.

	✓ Μετασχηματισμός αριθμητικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή. **Νέες Έννοιες** ✓ Απλοποίηση αριθμητικών παραστάσεων ✓ Τιμή αριθμητικών παραστάσεων		 *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Αν το $AB = B\Gamma = 1\ cm$, ποιο γνωστό θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το $A\Gamma$ και $\Gamma\Delta$; • Γιατί το $A\Gamma \perp \Gamma\Delta$;
5. **Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης** (Αρ6.12) Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.	5.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και μετασχηματισμούς από παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να απλοποιούν αλγεβρικές παραστάσεις και να υπολογίζουν την αριθμητική τιμή τους. **Προαπαιτούμενες γνώσεις**	**Παράδειγμα:** *Υπολογισμός τιμής αλγεβρικών παραστάσεων με τη χρήση του ορισμού δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη και τις ιδιότητες ριζών* • Αν $x = 1 + \sqrt{2}$ και $y = 1 + \sqrt{3}$: (α) να υπολογίσετε την παράσταση $x^2 - y^2$ (β) να δείξετε ότι οι παραστάσεις $A = 3x^2 - 6x + 3$ και $B = 2y^2 - 4y + 2$ είναι ίσες	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια της ισοδύναμης παράστασης με ρητό παρονομαστή και τις ιδιότητες ριζών, για να κατανοήσω ποσότητες και σχέσεις μεταξύ τους.* **Παραδείγματα:** Να αποδείξετε ότι η τιμή της παράστασης A, όταν $x = 5$ μπορεί να πάρει τη μορφή $a\sqrt{6}$, $a \in \mathbb{N}$. $A = \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} - \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς μπορεί το κάθε κλάσμα να γραφεί ισοδύναμα με ρητό παρονομαστή.

	✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Μετασχηματισμός αλγεβρικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή **Νέες Έννοιες** ✓ Απλοποίηση αλγεβρικής παράστασης ✓ Αριθμητική τιμή αλγεβρικής παράστασης		• Εναλλακτικά θα μπορούσαμε να προσθέσουμε τα δύο κλάσματα. Ποιος είναι ο κοινός παρονομαστής του αθροίσματος;
6. **Επίλυση προβλημάτων με ν −οστές ρίζες** (Αρ6.13) Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της νιοστής ρίζας πραγματικού αριθμού και δυνάμεων με ρητό εκθέτη στην επίλυση προβλημάτων.	6.1 Μεταφράζουν λεκτικά προβλήματα σε αλγεβρικές παραστάσεις με ν −οστές ρίζες πραγματικού αριθμού και δυνάμεις με ρητό εκθέτη και τα επιλύουν. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Μετάφραση λεκτικών αναπαραστάσεων σε αριθμητικές και αλγεβρικές εκφράσεις ✓ Ορισμός νιοστής ρίζας ($\sqrt[\nu]{a}$, $\nu \in \mathbb{N}$) ✓ Ορισμός δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Ιδιότητες ριζών	**Παραδείγματα:** *Εφαρμογής των ιδιοτήτων στους αριθμούς με εκθέτη ρητό αριθμό* • Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά $\frac{1}{2}$, αν υψωθεί στην 9^{η} δύναμη δίνει 512. • Να εκφράσετε την τιμή της αριθμητικής παράστασης $A = \sqrt[3]{2} \cdot 2^{\frac{1}{5}}$ στην μορφή $2^{\frac{a}{\beta}}$ και στη μορφή $\sqrt[\nu]{\gamma}$ με $a, \beta, \gamma, \nu \in \mathbb{N}$.	**ΜΠ.1 Κατανόηση μέσω προβλήματος και επιμονή στη λύση προβλήματος** *Διαβάζω το πρόβλημα, σκέφτομαι πώς θα το λύσω και ελέγχω τη λογικότητα της απάντησής μου.* **Παράδειγμα:** Να αποδείξετε ότι το άθροισμα Σ των πιο κάτω άρρητων αριθμών είναι φυσικός αριθμός. $\Sigma = \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{20+\sqrt{399)}}$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς μπορούμε να απλοποιήσουμε τους όρους του αθροίσματος;

	✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη **Νέες έννοιες** ✓ Επίλυση προβλημάτων με νιοστές ρίζες		• Γιατί είναι χρήσιμο το ισοδύναμο κλάσμα με ρητό παρονομαστή στο πρόβλημα μας;
7. **Επίλυση εξίσωσης** (Αρ6.15) Επιλύουν άρρητες, εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις.	7.1. Χρησιμοποιούν τον ορισμό της δύναμης αριθμού με ρητό εκθέτη, τις ιδιότητες των ριζών και μετασχηματισμούς αλγεβρικών παραστάσεων με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή, για να επιλύουν εξισώσεις. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Δύναμη αριθμού με ρητό εκθέτη μορφής $a^{\frac{\mu}{\nu}}$, όπου $a > 0, \mu, \nu \in \mathbb{N}$ ✓ Δυνάμεις πραγματικού αριθμού ✓ Διαδικασία επίλυσης εξίσωσης βαθμού $\nu \geq 2$ ✓ Ιδιότητες ριζών ✓ Ιδιότητες δυνάμεων με ρητό εκθέτη ✓ Προτεραιότητα πράξεων ✓ Μετασχηματισμός αλγεβρικής παράστασης με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή **Νέες έννοιες**	**Παραδείγματα:** *Επίλυση εξισώσεων με νιοστές ρίζες.* • Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $x^{\frac{2}{3}} = 8$ (β) $2(x-1)^{-\frac{3}{2}} = 54$ • Να λύσετε τις εξισώσεις: (α) $2x^6 + 7 = 1465$ (β) $5(x+1)^4 = 80$ • Να βρείτε τον αριθμό, ο οποίος ελαττωμένος κατά $\frac{1}{2}$, αν υψωθεί στην 9^{η} δύναμη δίνει 512. • Να εκφράσετε τον ν συναρτήσει των K_0, K_1 και τ, αν ισχύει $K_0(1+\tau)^{\nu} = K_1$.	**ΜΠ.2 Ποσοτική και αφηρημένη σκέψη** *Χρησιμοποιώ την έννοια της νιοστής ρίζας, για να κατανοήσω προβλήματα.* **Παράδειγμα:** Ποσό €20000 ανατοκίσθηκε για ένα χρονικό διάστημα προς 3% και έγινε €23185,48. Να υπολογίσετε το χρονικό διάστημα. *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Πώς υπολογίζω το τελικό ποσό στο τέλος του πρώτου χρόνου, όταν το αρχικό κεφάλαιο είναι €20000 και το αντίστοιχο επιτόκιο 3%; • Πώς υπολογίζω το τελικό ποσό στο τέλος του δεύτερου χρόνου; • Τι πρέπει να προσέξω για το αρχικό ποσό του δεύτερου χρόνου; • Ποιος γενικός τύπος προκύπτει για το ποσό στο τέλος του ν χρόνου και ποια είναι η αντίστοιχη εξίσωση στο πρόβλημα;

	✓ Επίλυση εξισώσεων με νιοστές ρίζες		
8. **Ιδιότητες διάταξης** (Αρ5.14) Αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και της σχέσης διάταξης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, συμμετρικά στοιχεία σε μία πράξη, ουδέτερο στοιχείο σε μια πράξη) και διερευνούν κατά πόσο μια πράξη είναι κλειστή στο σύνολο που ορίζεται.	8.1. Αναγνωρίζουν τις βασικές ιδιότητες διάταξης των πραγματικών αριθμών και να μπορούν να τις αποδεικνύουν. **Προαπαιτούμενες γνώσεις:** ✓ Ορισμός ανίσωσης α' βαθμού ✓ Επίλυση ανίσωσης α' βαθμού με χρήση ιδιοτήτων όπως: ➢ Πρόσθεση-αφαίρεση και στα δύο μέλη της ανίσωσης με τον ίδιο αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ➢ Πολλαπλασιασμός-διαίρεση και στα δύο μέλη της ανίσωσης με τον ίδιο θετικό αριθμό, χωρίς να αλλάξει η φορά της ➢ Πολλαπλασιασμός - διαίρεση και στα δύο μέλη της ανίσωσης με τον ίδιο αρνητικό αριθμό, με αλλαγή της φοράς της ανίσωσης **Νέες Έννοιες** ✓ Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών:	**Παράδειγμα:** *Απόδειξη βασικών ιδιοτήτων* • Να αποδείξετε ότι: (α) $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \alpha^2 \geq 0$ (β) Αν $\mu, \nu \in \mathbb{N}, \mu < \nu$,τότε $\begin{cases} \sqrt[\mu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\alpha}, \alpha > 1 \\ \sqrt[\mu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\alpha},\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$	**ΜΠ.6 Ακρίβεια** *Δίνω ακριβείς ορισμούς σε συζήτηση με άλλους και αιτιολογώ τις προτάσεις μου με κατάλληλα παραδείγματα.* **Παράδειγμα:** Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, αιτιολογώντας τις απαντήσεις σας: (α) Αν $\alpha \geq 10, \beta \geq 20$, τότε $3\kappa + 2\beta \geq 60$ (β) $\sqrt[3]{100} < \sqrt[4]{100}$ (γ) Αν $\alpha^3 < 2\alpha^2\beta \Longrightarrow \alpha < 2\beta$ (δ) Αν $x < -1 \Longrightarrow x^4 < 1$ (ε) Αν $\alpha < \beta \Longrightarrow \alpha - 2 < \beta - 8$ *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες ιδιότητες χρησιμοποιώ, για να απαντήσω στις πιο πάνω ερωτήσεις; • Ποια κατάλληλα αντιπαραδείγματα χρησιμοποιώ, για να απορρίψω έναν ισχυρισμό που θεωρώ λανθασμένο;

	➢ $\forall a \in \mathbb{R}, a^2 \geq 0$ ➢ Αν α, β ομόσημοι, τότε $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{\beta}$. ➢ Αν $\alpha, \beta > 0, \nu \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha^\nu > \beta^\nu$. ➢ Αν $\alpha, \beta > 0, \nu \in \mathbb{N}$, τότε $\alpha > \beta \Leftrightarrow \sqrt[\nu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\beta}$. ➢ Αν $\mu, \nu \in \mathbb{N}, \mu < \nu$,τότε $\begin{cases} \sqrt[\mu]{\alpha} > \sqrt[\nu]{\alpha}, \alpha > 1 \\ \sqrt[\mu]{\alpha} < \sqrt[\nu]{\alpha}, \ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$		
	8.2. Εφαρμόζουν τις ιδιότητες διάταξης, για να συγκρίνουν πραγματικούς αριθμούς. **Προαπαιτούμενες γνώσεις** ✓ Ιδιότητες διάταξης πραγματικών αριθμών **Νέες έννοιες** ✓ Σύγκριση πραγματικών αριθμών με τη χρήση ιδιοτήτων διάταξης	**Παραδείγματα:** *Εφαρμογή ιδιοτήτων για σύγκριση πραγματικών αριθμών* • Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta$, να συγκρίνετε τους αριθμούς: (α) $A = \frac{1}{2}(3\alpha + 8)$ και $B = \frac{1}{2}(3\beta + 8)$ (β) $\Gamma = 4 - 3\alpha$ και $\Delta = 4 - 3\beta$ • Αν $5 < \kappa < 8$ και $-2 < \lambda < -1$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών βρίσκονται οι παραστάσεις: (α) $2\kappa + \lambda$ (β) $\kappa - 3\lambda$ (γ) $3\kappa - \lambda$ (δ) $\kappa\lambda + \frac{\kappa}{\lambda}$	**ΜΠ.4 Μοντελοποίηση** *Ερμηνεύω ένα πραγματικό πρόβλημα και το μεταφράζω σε μαθηματικό πλαίσιο, επεξηγώντας το κάθε μου βήμα.* **Παράδειγμα:** Οικόπεδο σχήματος ορθογώνιου παραλληλογράμμου έχει διαστάσεις $40m$ επί $30m$. Αν στις μετρήσεις των διαστάσεων το σφάλμα μέτρησης δεν ξεπερνά τα $20cm$, να υπολογίσετε το πιθανό σφάλμα στη μέτρηση: (α) της περιμέτρου (β) του εμβαδού του ορθογωνίου παραλληλογράμμου *Απαντώ στις ερωτήσεις:* • Ποιες ανισοτικές σχέσεις μπορώ να χρησιμοποιήσω, ώστε να «οριοθετήσω» τις πραγματικές διαστάσεις του ορθογώνιου;

Παράδειγμα - Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

- **Αρ6.4** Ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και παριστάνουν δύναμη με εκθέτη ρητό αριθμό ως ρίζα και αντίστροφα.
- **Αρ6.11** Εκτελούν πράξεις ριζών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων.
- **Αρ6.12** Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.
- **Αρ6.13** Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της νιοστής ρίζας πραγματικού αριθμού και δυνάμεων με ρητό εκθέτη στην επίλυση προβλημάτων.
- **Αρ6.15** Επιλύουν άρρητες, εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις.

1.3 ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΡΗΤΟ ΕΚΘΕΤΗ

Διερεύνηση

Από τον ορισμό της ρίζας έχουμε για $x > 0, y > 0$ ότι:

$$x^2 = y \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$$

Χρησιμοποιώντας την πιο πάνω πρόταση, να συμπληρώσετε τα πιο κάτω και να αναφέρετε το συμπέρασμα σας.

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^2 = \cdots \Leftrightarrow 5^{\frac{1}{2}} = \cdots$$

$$\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = \cdots \Longrightarrow 5^{\frac{1}{3}} = \cdots$$

Έχουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a},\ \ a > 0$$

Με ανάλογο τρόπο, έχουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^3 = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a},\ \ a > 0$$

Πρόταση

Για $a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$ και $\nu \in \mathbb{N}$ ισχύει:

$$a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού, παίρνουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{1}{\nu}}\right)^\nu = a \Leftrightarrow a^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a}$$

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$
- $11^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{11}$

Τα πιο πάνω μπορούμε να τα αντιμετωπίσουμε και με διαφορετικό τρόπο στην περίπτωση που η βάση γράφεται ως δύναμη με εκθέτη φυσικό αριθμό.

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $9^{\frac{1}{2}} = (3^2)^{\frac{1}{2}} = 3^{2\cdot\frac{1}{2}} = 3^1 = 3$
- $8^{\frac{1}{3}} = (2^3)^{\frac{1}{3}} = 2^{3\cdot\frac{1}{3}} = 2^1 = 2$

32 Ενότητα 01: Πραγματικοί Αριθμοί

Παράδειγμα - Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Γενικά, αν ο εκθέτης μιας δύναμης είναι ο ρητός αριθμός

$$\frac{\mu}{\nu},\ \ \mu,\nu \in \mathbb{Z},\ \ \nu > 0$$

και η βάση είναι ένας θετικός πραγματικός αριθμός $a, (a > 0)$, τότε η παράσταση της μορφής

$$a^{\frac{\mu}{\nu}}$$

ονομάζεται **δύναμη με ρητό εκθέτη.**

Τον αριθμό $a^{\frac{\mu}{\nu}}$ μπορούμε να τον δούμε με δύο διαφορετικούς τρόπους

$$\begin{cases} a^{\frac{\mu}{\nu}} = (a^{\mu})^{\frac{1}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} \\ a^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(a^{\frac{1}{\nu}}\right)^{\mu} = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\mu} \end{cases}$$

Πρόταση
Για $a \in \mathbb{R},\ a \geq 0$ και $\mu,\nu \in \mathbb{Z},\ \nu > 0$ ισχύει:

$$a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}} = \left(\sqrt[\nu]{a}\right)^{\mu}$$

Απόδειξη
Από τον ορισμό της νιοστής ρίζας μη αρνητικού πραγματικού αριθμού, παίρνουμε ότι:

$$\left(a^{\frac{\mu}{\nu}}\right)^{\nu} = a^{\mu} \Leftrightarrow a^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{a^{\mu}}$$

Παρατηρήσεις

- Αν μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε ισχύει:
$$0^{\frac{\mu}{\nu}} = 0$$
- Για κάθε φυσικό ν και $a > 0$, ισχύει:
$$a^{-\frac{1}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{1}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a}}$$
- Γενικά, όταν $a > 0$, μ ακέραιος και ν θετικός ακέραιος, ισχύει ότι:
$$a^{-\frac{\mu}{\nu}} = (a^{-1})^{\frac{\mu}{\nu}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{\mu}{\nu}} = \frac{1}{a^{\frac{\mu}{\nu}}} = \frac{1}{\sqrt[\nu]{a^{\mu}}}$$

Παράδειγμα1
Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $4^{\frac{1}{2}}$ (β) $9^{-\frac{1}{2}}$ (γ) $16^{\frac{3}{4}}$

Λύση

(α) $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$

(β) $9^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

(γ) $16^{\frac{3}{4}} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^{3} = 2^{3} = 8$

Παράδειγμα 2
Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12}$ (β) $2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2}$ (γ) $\sqrt{5} + 5^{\frac{3}{2}}$

Λύση

(α) $3^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{12} = \sqrt{36} = 6$

(β) $2^{\frac{4}{3}} : \sqrt[3]{2} = 2^{\frac{4}{3}} : 2^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{4}{3}-\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{3}} = 2$

(γ) $\sqrt{5} + 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{5^{3}} = \sqrt{5} + \sqrt{5^{2} \cdot 5} = \sqrt{5} + 5\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$

Παράδειγμα 3
Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^{\frac{1}{2}} = 3,\ \ x \geq 0$

(β) $x^{\frac{2}{3}} = 9,\ \ x \geq 0$

(γ) $y^{-\frac{3}{2}} = 8,\ \ y > 0$

Λύση

(α) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στη δύναμη 2, ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1. Για $x \geq 0$, έχουμε:
$$x^{\frac{1}{2}} = 3 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{2} = 3^{2} \Leftrightarrow x = 3^{2} \Leftrightarrow x = 9$$

(β) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στην $\frac{3}{2}$, ώστε ο εκθέτης του x να γίνει 1. Για $x \geq 0$, έχουμε:
$$x^{\frac{2}{3}} = 9 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = (3^{2})^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow x = 27$$

(γ) Υψώνουμε και τα δύο μέλη της εξίσωσης στην $-\frac{2}{3}$, ώστε ο εκθέτης του y να γίνει 1. Για $y > 0$, έχουμε:
$$y^{-\frac{3}{2}} = 8 \Leftrightarrow \left(y^{-\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}} = 8^{-\frac{2}{3}} \Leftrightarrow y = 8^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

Παράδειγμα - Δυνάμεις με Ρητό Εκθέτη

Δραστηριότητες

1. Να μετατρέψετε τα πιο κάτω ριζικά σε δύναμη με ρητό εκθέτη:
   (α) $\sqrt[3]{5^2}$ (β) $\sqrt{3}$ (γ) $\sqrt[5]{1000}$

2. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:
   (α) $16^{\frac{1}{2}}$ (β) $8^{\frac{1}{3}}$ (γ) $81^{\frac{1}{4}}$
   (δ) $\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}}$ (ε) $9^{-\frac{1}{2}}$ (στ) $\left(\frac{1}{32}\right)^{\frac{2}{5}}$
   (ζ) $\sqrt{\left(\frac{81}{64}\right)^3}$ (η) $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^{-2}}$ (θ) $8^{\frac{10}{6}}$

3. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\mathrm{A} = 2^{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt[4]{2} + 3^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{27}$ είναι φυσικός αριθμός.

4. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τους πιο κάτω ισχυρισμούς, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό, αιτιολογώντας την απάντηση σας.

(α)	$5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$4^{\frac{1}{2}} = 2$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	$\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{4}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\sqrt[3]{5} \cdot 5^{\frac{2}{3}} = 5$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η λύση της εξίσωσης $x^{\frac{1}{2}} = 3,\ x > 0$ είναι ο αριθμός $\sqrt{3}$.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(στ)	Η εξίσωση $x^3 = -27$ είναι αδύνατη.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ζ)	$\sqrt[3]{(-8)^2} = (-8)^{\frac{2}{3}}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

5. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω παραστάσεις, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:
   (α) $5^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$ (β) $\sqrt[5]{2^{18}} \div 2^{\frac{1}{5}}$
   (γ) $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt[3]{27} \cdot 24^{\frac{1}{3}}$ (δ) $2^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{3}{2}} + 2^{\frac{5}{2}}$

6. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:
   (α) $x^{\frac{1}{2}} = 5,\ x \geq 0$ (β) $x^{\frac{1}{3}} = 2,\ x > 0$
   (γ) $1 + x^{\frac{2}{3}} = 5,\ x \geq 0$ (δ) $5(x+1)^{\frac{1}{3}} = 20,\ x \geq -1$

7. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις για πραγματικές τιμές του x:
   (α) $x^{-\frac{1}{2}} = 4,\ x \geq 0$ (β) $x^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{27},\ x > 0$

8. Η απόσταση s (σε m) που διανύει ένα αυτοκίνητο το οποίο επιταχύνει δίνεται από τη σχέση $s(t) = 10t^{\frac{3}{2}}$, όπου t είναι ο χρόνος σε sec. Να υπολογίσετε τον χρόνο που κινήθηκε το αυτοκίνητο, αν η απόσταση που διάνυσε είναι 640 m.

9. Να αποδείξετε ότι:
$$\left(a^{\frac{1}{2}} + \beta^{\frac{1}{2}}\right)^2 = a + \beta + 2\sqrt{a\beta},\ \ a, \beta \geq 0$$

Πίνακας Περιεχομένων

Πραγματικοί Αριθμοί - ΔΕ

Πραγματικοί Αριθμοί - ΔΕ

Αρ6.2 Ορίζουν την έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού a και αποδεικνύουν τις ιδιότητες ριζών, όταν $\nu \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^+$.	**Αρ.Π.10.6.** Ορίζουν τη $\nu-$οστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a ως τη μοναδική μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu = a$ και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες (γινόμενο και πηλίκο ριζών).
Αρ6.4 Ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και παριστάνουν δύναμη με εκθέτη ρητό αριθμό ως ρίζα και αντίστροφα.	**Αρ.Π.10.7.** Ορίζουν δυνάμεις με ρητό εκθέτη και διερευνούν τις ιδιότητές τους.
Αρ6.9 Μετασχηματίζουν αριθμητικές παραστάσεις με άρρητο παρονομαστή σε ισοδύναμες παραστάσεις με ρητό παρονομαστή.	**Αλ.Π.10.2.** Χρησιμοποιούν τις ταυτότητες σε συνδυασμό με τις ιδιότητες των $\nu-$οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον μετασχηματισμό αλγεβρικών παραστάσεων.

Πραγματικοί Αριθμοί - ΔΕ

Αρ6.11 Εκτελούν πράξεις ριζών και υπολογίζουν την τιμή αριθμητικών παραστάσεων.	**Αρ.Π.10.8.** Χρησιμοποιούν τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων.
Αρ6.12 Υπολογίζουν την αριθμητική τιμή αλγεβρικών παραστάσεων.	**Αρ.Π.10.8.** Χρησιμοποιούν τον ορισμό και τις ιδιότητες των ν-οστών ριζών και γενικότερα των δυνάμεων με ρητό εκθέτη στον υπολογισμό της τιμής αριθμητικών παραστάσεων.
Αρ6.13 Εφαρμόζουν τις ιδιότητες της νιοστής ρίζας πραγματικού αριθμού και δυνάμεων με ρητό εκθέτη στην επίλυση προβλημάτων.	

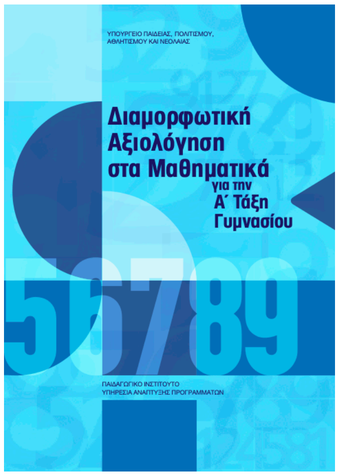
Πραγματικοί Αριθμοί - ΔΕ

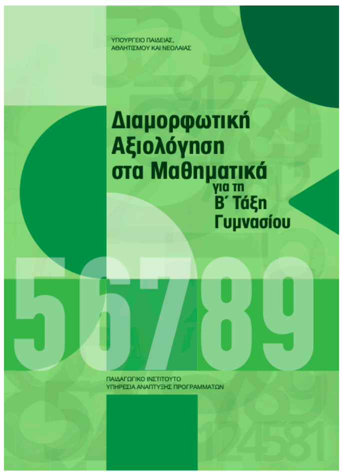
Αρ6.15 Επιλύουν άρρητες, εκθετικές και λογαριθμικές εξισώσεις.	**Αλ.Σχ.10.4.** Επιλύουν εξισώσεις της μορφής $x^{\nu} = a$.
Αρ5.14 Αναγνωρίζουν τις ιδιότητες των πράξεων της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και της σχέσης διάταξης στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (αντιμεταθετική, προσεταιριστική, επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση, συμμετρικά στοιχεία σε μία πράξη, ουδέτερο στοιχείο σε μια πράξη) και διερευνούν κατά πόσο μια πράξη είναι κλειστή στο σύνολο που ορίζεται.	**Αλ.Σχ.10.2.** Διερευνούν τις ιδιότητες που συνδέουν τη διάταξη με τις πράξεις και αποδεικνύουν ανισοτικές σχέσεις.

Πίνακας Περιεχομένων

Εισαγωγή

Η διαμορφωτική αξιολόγηση είναι η διαδικασία που χρησιμοποιείται από τον εκπαιδευτικό και τους μαθητές με στόχο τη βελτίωση των μαθησιακών αποτελεσμάτων, μέσω της ανατροφοδότησης του μαθητή και του εκπαιδευτικού. Αν και στη βιβλιογραφία υπάρχουν αρκετοί ορισμοί για τη διαμορφωτική αξιολόγηση, η ανατροφοδότηση των εκπαιδευτικών και των μαθητών αποτελεί το αδιαμφισβήτητο και αμετάβλητο στοιχείο και χαρακτηριστικό της διαμορφωτικής αξιολόγησης. Μέσω της ανατροφοδότησης, οι μαθητές γνωρίζουν τι έχουν επιτύχει και τι όχι, και πώς και πού πρέπει να επικεντρώσουν τις προσπάθειές τους. Οι εκπαιδευτικοί ελέγχουν την ποιότητα και την αποτελεσματικότητα της διδασκαλίας τους και προγραμματίζουν τα επόμενα βήματά τους. Ταυτόχρονα, τα στοιχεία που συλλέγονται από τη συστηματική διαμορφωτική αξιολόγηση αποτελούν την τεκμηρίωση για τις αλλαγές, όπου είναι απαραίτητο, κατά την αναθεώρηση των αναλυτικών προγραμμάτων των μαθηματικών.





Διαδικαστική Επάρκεια

Η διαδικαστική επάρκεια αναφέρεται στη γνώση διαδικασιών και στην ικανότητα των μαθητών να γνωρίσουν πότε και πώς θα χρησιμοποιήσουν συγκεκριμένες διαδικασίες, για να δίνουν λύσεις σε σχετικά έργα. Περιλαμβάνει, επίσης, την ικανότητα να εκτελούν διαδικασίες και αλγόριθμους με ευχέρεια, ευελιξία και με ακρίβεια. Η ευχέρεια της εκτέλεσης διαδικασιών και αλγορίθμων αναφέρεται τόσο στη νοερή όσο και στη γραπτή εκτέλεση των πράξεων. Περιλαμβάνει, επιπρόσθετα, την αναπαραγωγή εννοιών και απομνημόνευση τύπων και κανόνων. Η απόκτηση δεξιοτήτων, όπως η χρήση μαθηματικών οργάνων, η χρήση υπολογιστικής μηχανής, η ενασχόληση με μαθηματικά εφαρμογίδια, η μέτρηση και η εκτίμηση ποσοτήτων, αποτελεί βασικό στοιχείο της διαδικαστικής επάρκειας.

Εννοιολογική Κατανόηση

Η εννοιολογική κατανόηση είναι βασικό μέλημα της διδασκαλίας των μαθηματικών. Σημαίνει την ανάπτυξη των εννοιών με τρόπο ώστε η μαθηματική σκέψη των μαθητών να αποτελεί ένα ενιαίο όλο και όχι σύνολο ασύνδετων εννοιών. Όταν οι έννοιες είναι μεμονωμένες και τμηματικές, δεν συμβάλλουν στην επίλυση παρόμοιων ή παρεμφερών έργων και ούτε βοηθούν τους μαθητές να αναπτύξουν νέες έννοιες, συνδέοντάς τις με προϋπάρχουσες γνώσεις τους.

Η εννοιολογική κατανόηση μειώνει την ανάγκη του μαθητή για απομνημόνευση και αυξάνει την ικανότητά του για μόνιμη μάθηση διαδικασιών και εννοιών, και επομένως αναπτύσσει την αυτοπεποίθησή του. Βασικό, επίσης, χαρακτηριστικό της εννοιολογικής κατανόησης είναι η διασύνδεση των εννοιών.

Μαθηματικός Συλλογισμός

Ένας γενικός ορισμός για τον μαθηματικό συλλογισμό είναι η ικανότητα του μαθητή να κατασκευάζει, να αναπαριστά και να επιλύει προβλήματα. Ο μαθηματικός συλλογισμός αποτελείται ουσιαστικά **(α)** από την ικανότητα του ατόμου να αναπροσαρμόζει τον τρόπο σκέψης του, ανάλογα με τις καταστάσεις ενός προβλήματος και να αιτιολογεί τις απαντήσεις του με πειστικό τρόπο (adaptive reasoning, Ostler, 2011), και **(β)** από την ικανότητα του μαθητή να κατασκευάζει μαθηματικά προβλήματα, να μεταφράζει καταστάσεις της ζωής σε μαθηματικό περιεχόμενο και να χρησιμοποιεί με αποτελεσματικότητα τις μεθόδους ή στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων.

Η χαρακτηριστική ικανότητα του μαθηματικού συλλογισμού είναι η ευελιξία, που θεωρείται η σημαντικότερη γνωστική λειτουργία για την επίλυση λεκτικών προβλημάτων και προβλημάτων διαδικασίας. Η ευελιξία συνίσταται στην ικανότητα του ατόμου να δημιουργεί και να αναπροσαρμόζει μεθόδους επίλυσης προβλημάτων (δημιουργική σκέψη).

Έργα Διαδικαστικής Επάρκειας

1. Να υπολογίσετε τις πιο κάτω ρίζες:

(α) $\sqrt{49}$ **(β)** $\sqrt[3]{64}$ **(γ)** $\sqrt[4]{\dfrac{1}{10000}}$

(δ) $\sqrt[3]{0,027}$ **(ε)** $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$ **(στ)** $\sqrt[6]{\dfrac{1}{64}}$

2. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις:

(α) $x^3 = 64$ **(β)** $x^5 = -32$

(γ) $x^4 = 16$ **(δ)** $x^{2023} = 1$

(ε) $x^8 = 13$ **(στ)** $x^4 = -1$

3. Να απλοποιήσετε τις πιο κάτω παραστάσεις:

(α) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$

(β) $\dfrac{\sqrt[4]{x^7}}{\sqrt[4]{x^3}}, \quad x \geqslant 0$

(γ) $\sqrt[6]{x^2}, \quad x \geqslant 0$

(δ) $\sqrt{\sqrt[3]{7^6}}$

(ε) $\dfrac{\sqrt[5]{y^2} \cdot \sqrt[5]{y^4}}{\sqrt[5]{y}}, \quad y > 0$

(στ) $\sqrt[3]{\sqrt{x} \cdot \sqrt{x^5}}, \quad x \geqslant 0$

4. Να γράψετε τα πιο κάτω ριζικά στην πιο απλή τους μορφή:

(α) $\sqrt{18}$

(β) $\sqrt[3]{48}$

(γ) $\sqrt[4]{\dfrac{32}{81}}$

(δ) $\sqrt[3]{a^4\beta^5}, \quad a, \beta \geqslant 0$

(ε) $\sqrt{32x^5}, \quad x \geqslant 0$

(στ) $\sqrt{\dfrac{125a}{\beta^5}}, \quad a, \beta > 0$

Έργα Διαδικαστικής Επάρκειας

5. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω ρίζες σε δυνάμεις με ρητό εκθέτη:

(α) $\sqrt{5}$ **(β)** $\sqrt[3]{7^2}$ **(γ)** $\sqrt[8]{11^5}$

(δ) $\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}}$ **(ε)** $\sqrt[6]{8^{-2}}$ **(στ)** $\sqrt{a^{-\beta}}, \quad a, \beta \in \mathbb{N}$

6. Να υπολογίσετε την τιμή των πιο κάτω παραστάσεων, χωρίς τη χρήση υπολογιστικής μηχανής:

(α) $25^{\frac{1}{2}}$ **(β)** $27^{\frac{1}{3}}$ **(γ)** $\left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{1}{2}}$

(δ) $8^{-\frac{2}{3}}$ **(ε)** $16^{-\frac{1}{4}}$ **(στ)** $\left(\frac{64}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$

Έργα Διαδικαστικής Επάρκειας

7. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση:

(α) Η συζυγής παράσταση για τον αριθμό $\sqrt{2}$ είναι η:

i. -2 **ii.** $-\sqrt{2}$ **iii.** $\sqrt{2}$ **iv.** 2

(β) Η συζυγής παράσταση για τον αριθμό $\sqrt{5}-3$ είναι η:

i. $\sqrt{5}+3$ **ii.** $3-\sqrt{5}$ **iii.** $\sqrt{5}-3$ **iv.** $5-\sqrt{3}$

(γ) Η συζυγής παράσταση για τον αριθμό $2\sqrt{7}+3\sqrt{6}$ είναι η:

i. $7\sqrt{2}-6\sqrt{3}$ **ii.** $2\sqrt{7}+3\sqrt{6}$ **iii.** $2\sqrt{6}-3\sqrt{7}$ **iv.** $2\sqrt{7}-3\sqrt{6}$

8. Να μετατρέψετε τις πιο κάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

(α) $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ **(β)** $-\dfrac{5}{\sqrt{11}}$

(γ) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ **(δ)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}}$

Έργα Διαδικαστικής Επάρκειας

9. Να συγκρίνετε τους πιο κάτω αριθμούς, αν ισχύει ότι οι a, β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί, με $a > \beta$:

(α) $\mathrm{A} = a + 2, \quad \mathrm{B} = \beta + 2$

(β) $\Gamma = 3a, \quad \Delta = 3\beta$

(γ) $\mathrm{E} = 5 - a, \quad \mathrm{Z} = 5 - \beta$

(δ) $\mathrm{H} = \dfrac{2}{a}, \quad \Theta = \dfrac{2}{\beta}$

10. Να βάλετε σε κύκλο την ορθή απάντηση:

(α) Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$, με $0 < a < \beta$, τότε:

i. $a^3 > \beta^3$

ii. $2a + 3 > 2\beta + 3$

iii. $\sqrt[5]{a} < \sqrt[5]{\beta}$

iv. $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{\beta}$

(β) Αν $a, \beta \in \mathbb{R}$, με $a > 1$ και $\beta < -4$, τότε:

i. $-a^2 > 1$

ii. $a - \beta > 5$

iii. $\beta^2 < 16$

iv. $a\beta < -4$

Έργα Εννοιολογικής Κατανόησης

1. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α)	Η νιοστή ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού a, όπου ν θετικός ακέραιος αριθμός, είναι ο αριθμός β ο οποίος, όταν υψωθεί σε δύναμη με εκθέτη ν, δίνει τον αριθμό a.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	$x^5 = 17 \Rightarrow x = \sqrt[5]{17}$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Ισχύει $\sqrt[\nu]{x^\nu} = x$, όπου ν άρτιος φυσικός αριθμός.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(δ)	$\sqrt[6]{\dfrac{\beta^6}{64}} = \sqrt[6]{\left(\dfrac{\beta}{2}\right)^6} = \dfrac{\beta}{2}, \quad \beta \geqslant 0$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(ε)	Η εξίσωση $\sqrt{x-2} = -16$ δεν έχει λύσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Έργα Εννοιολογικής Κατανόησης

2. Να κάνετε τις πράξεις:

(α) $3\sqrt{50} + 2\sqrt{32}$

(β) $\left(5\sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{128}\right) : \sqrt[3]{2}$

(γ) $\sqrt{20 - \sqrt{13 + \sqrt{11 - \sqrt[3]{8}}}}$

(δ) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 2^3 \cdot 2^4}$

(ε) $\left(\sqrt{7} + 4\right)\left(\sqrt{7} - 5\right)$

(στ) $\left(7 - \sqrt{5}\right)^2 - 14\left(7 - \sqrt{5}\right) + 44$

3. Να αποδείξετε ότι:

(α) Ο αριθμός

$$A = \sqrt[4]{\sqrt{\sqrt[3]{5}}} - \sqrt[6]{\sqrt{\sqrt[4]{25}}} + 2023$$

είναι ακέραιος.

(β) Η παράσταση

$$B = \sqrt{7 - 2\sqrt{6}} \cdot \sqrt{7 + 2\sqrt{6}} - \sqrt{28 - 10\sqrt{3}}$$

μπορεί να πάρει τη μορφή $\sqrt{a}$, $a \in \mathbb{N}$.

4. Αν $a > \beta > 0$, να απλοποιήσετε την παράσταση:

$$A = \left(a - \sqrt{a^2 - \beta^2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{a + \sqrt{a^2 - \beta^2}}$$

5. Να λύσετε τις πιο κάτω εξισώσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών:

(α) $x^{\frac{1}{4}} = 2, \quad x \geqslant 0$

(β) $(2x - 1)^{\frac{2}{3}} = 4, \quad x \geqslant \dfrac{1}{2}$

(γ) $(4x - 3)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3}, \quad x \geqslant \dfrac{3}{4}$

(δ) $(7x + 2)^{\frac{5}{2}} + 11 = 12, \quad x \geqslant -\dfrac{2}{7}$

Έργα Εννοιολογικής Κατανόησης

6. Να χαρακτηρίσετε με ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ τις πιο κάτω προτάσεις, βάζοντας σε κύκλο τον αντίστοιχο χαρακτηρισμό:

(α)	Οι παραστάσεις $\sqrt{a}-\beta$ και $\sqrt{\beta}-a$, όπου $a,\beta>0$, είναι συζυγείς.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(β)	Οι παραστάσεις $$\frac{3}{\sqrt{17}-\sqrt{14}} \quad \text{και} \quad \sqrt{17}+\sqrt{14}$$ είναι ισοδύναμες.	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ
(γ)	Αν $x>16$, τότε ισχύει ότι: $$\frac{1}{\sqrt{x}+4}+\frac{1}{4-\sqrt{x}}=-\frac{8}{x-16}$$	ΣΩΣΤΟ / ΛΑΘΟΣ

Έργα Εννοιολογικής Κατανόησης

7. Αν $2 < x < 5$ και $-3 < y < -1$, να υπολογίσετε το μικρότερο δυνατό διάστημα στο οποίο βρίσκονται οι πιο κάτω πραγματικοί αριθμοί:

(α) $-2x$

(β) $3x + 5y$

(γ) xy

(δ) $\dfrac{x}{2y}$

8. Να εξετάσετε κατά πόσο ισχύουν οι πιο κάτω προτάσεις, δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.

(α) Αν $0 < a < 1$ και $\mu < \nu$, όπου μ, ν θετικοί ακέραιοι, τότε:

$$\sqrt[\mu]{a} > \sqrt[\nu]{a}$$

(β) Αν $a > \beta$ και $\gamma > \delta$, τότε:

$$a\gamma > \beta\delta$$

Έργα Μαθηματικού Συλλογισμού

1. Δίνεται η παράσταση:

$$A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$$

(α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A;

(β) Αν $x = -3$, να δείξετε ότι:

$$A^{2023} + A^{2022} + A^{2021} + A^{2020} = 0$$

2. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β και γ ισχύει ότι

$$\sqrt{a+\beta-11} + \sqrt[3]{\beta+\gamma-7} + \sqrt[4]{a+\gamma+4} = 0,$$

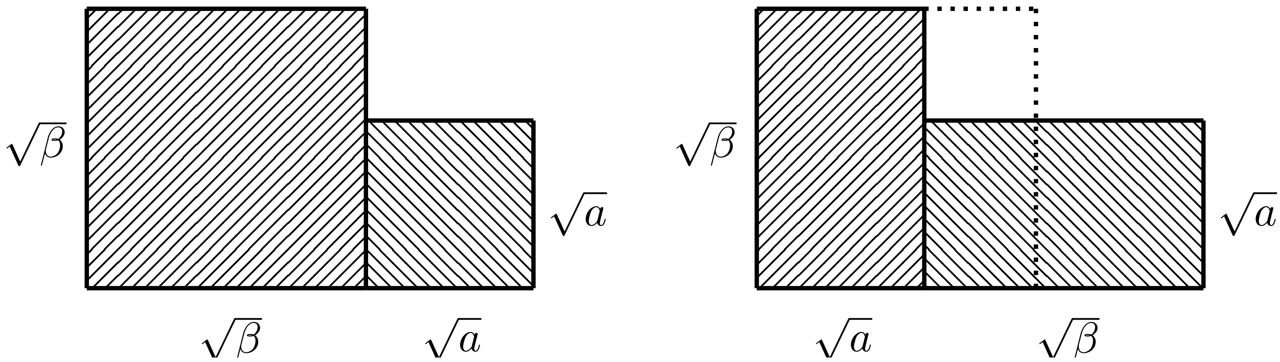
να υπολογίσετε το άθροισμα $a+\beta+\gamma$.

Έργα Μαθηματικού Συλλογισμού

3. **(α)** Να εξηγήσετε με ποιο τρόπο θα μπορούσατε να αξιοποίησετε τα πιο κάτω σχήματα, για να δείξετε ότι για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει ότι:

$$a + \beta \geqslant 2\sqrt{a\beta}$$

(β) Ποια σχέση πρέπει να συνδέει τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, β, ώστε να ισχύει η ισότητα;



4. Ο βασικός μεταβολικός ρυθμός είναι ο αριθμός των θερμίδων ανά ημέρα που χρειάζεται ένα άτομο για να διατηρηθεί στη ζωή. Ο βασικός μεταβολικός ρυθμός ενός ατόμου (B) σε θερμίδες ανά ημέρα υπολογίζεται από τον τύπο $B(w) = 70w^{\frac{3}{4}}$, όπου w είναι η μάζα του ατόμου σε κιλά. Να υπολογίσετε:
   - **(α)** τον βασικό μεταβολικό ρυθμό για ένα άτομο μάζας 60 kg
   - **(β)** τη μάζα ενός ατόμου, αν ο βασικός μεταβολικός ρυθμός του είναι ίσος με $2045,408$.
5. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς a, β ισχύει ότι $a^2 + \beta^2 = 1$, να δείξετε ότι:

$$\sqrt{a^4 + 4\beta^2} + \sqrt{\beta^4 + 4a^2} = 1$$

6. Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}+\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}}=3$$

7. Αν

$$a=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \quad \text{και} \quad \beta=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$B=\frac{a-\beta}{1+a\beta}$$

Έργα Μαθηματικού Συλλογισμού

8. Να βρείτε τον μεγαλύτερο θετικό ακέραιο x, για τον οποίο ισχύει:

$$x^{333} < 2^{777}$$

9. Να υπολογίσετε το πλήθος των ακέραιων αριθμών ν, για τους οποίους ισχύει:

$$\frac{1}{7} \leqslant \frac{9}{\nu} \leqslant \frac{1}{5}$$

10. Έστω $a, \beta > 0$. Να αποδείξετε ότι:

(α) $\dfrac{a}{\beta} + \dfrac{\beta}{a} \geqslant 2$

(β) $\dfrac{a\beta}{a+\beta} \leqslant \dfrac{a+\beta}{4}$

Πίνακας Περιεχομένων

Υπάρχουσα Κατάσταση

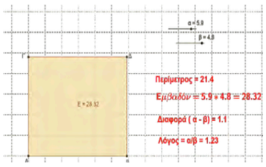
Η τεχνολογία αξιοποιείται στα σχολικά εγχειρίδια μαθηματικών για σκοπούς:

- διερεύνησης μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, μέσω μαθηματικών εφαρμογιδίων
- αξιολόγησης

1.5 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

Διερεύνηση

Να ανοίξετε το εφαρμογίδιο *«ALyk_En01_Anisotita.ggb»*.



Οι δρομείς «α» και «β», όπου $1 \le \alpha \le 6$, $2 \le \beta \le 5$, μεταβάλλουν τις διαστάσεις του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.

- Να δώσετε διάφορες τιμές στα α και β, για να συμπληρώσετε τον πιο κάτω πίνακα.

α	β	$\Pi = 2(\alpha + \beta)$	$E = \alpha\beta$

- Να υπολογίσετε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή:
  (α) της περιμέτρου (Π) του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$
  (β) του εμβαδού (E) του ορθογώνιου παραλληλογράμμου $ΑΒΓΔ$.
- Τι παρατηρείτε;
- Αν $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $1 \le x \le 6$, $2 \le y \le 5$, να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή των $x - y$ και $\frac{x}{y}$.
- Τι παρατηρείτε;

42 Ενότητα 01: Πραγματικοί Αριθμοί

Μελλοντικά Σχέδια

Με τη συνεχή ανάπτυξη της τεχνολογίας, τα «ψηφιακά μαθήματα» γίνονται ολοένα και πιο εύκολα, με τρόπο μάλιστα που συνάδει προς τον σκοπό και τις αρχές του αναλυτικού προγράμματος. Σε πολλές χώρες του εξωτερικού, αξιοποιείται η ανάπτυξη της τεχνολογίας και ολοένα πληθύνονται οι πλατφόρμες που υποβοηθούν τη διδασκαλία.

Οι πλατφόρμες αυτές είναι ειδικά σχεδιασμένες για χρήση από τους εκπαιδευτικούς. Προς τον σκοπό αυτό, η κάθε χώρα έχει εισαγάγει στις πλατφόρμες αξιολόγησης το αναλυτικό πρόγραμμά της και τους δείκτες επιτυχίας. Αντίστοιχα, σε κάθε δείκτη υπάρχουν παραδείγματα ερωτήσεων διαφορετικού τύπου, που αξιολογούν τις ικανότητες των μαθητών στον συγκεκριμένο δείκτη επιτυχίας και επάρκειας.

Μελλοντικά Σχέδια

Εκτός από την πληθώρα παραδειγμάτων για κάθε δείκτη του αναλυτικού προγράμματος, προσφέρεται η δυνατότητα στους εκπαιδευτικούς είτε να τροποποιήσουν είτε να συνθέσουν τις δικές τους ερωτήσεις και προβλήματα. Σε αρκετές, επίσης, πλατφόρμες οι ερωτήσεις ταξινομούνται όχι μόνο ανάλογα με τον δείκτη επιτυχίας και επάρκειας αλλά και με τον βαθμό πολυπλοκότητας ή δυσκολίας κάθε ερώτησης.

Οι πλατφόρμες επιτρέπουν την εισαγωγή πολλών τύπων ερωτήσεων και επιπρόσθετα μαθηματικών εφαρμογιδίων που είναι χρήσιμα για κατανόηση και για εξαγωγή συμπερασμάτων. Η χρήση των υλικών και των εφαρμογιδίων συνάδει με την αρχή της διαμορφωτικής αξιολόγησης σύμφωνα με την οποία εξετάζουμε ότι διδάσκουμε και διδάσκουμε όπως εξετάζουμε. Είναι γνωστό ότι στην τάξη των μαθηματικών οι εκπαιδευτικοί χρησιμοποιούν τα μαθηματικά εφαρμογίδια και τα εποπτικά μέσα, αλλά στην εξέταση περιορίζονται σε προβλήματα και ερωτήσεις που δεν απαιτούν τη χρήση τους.

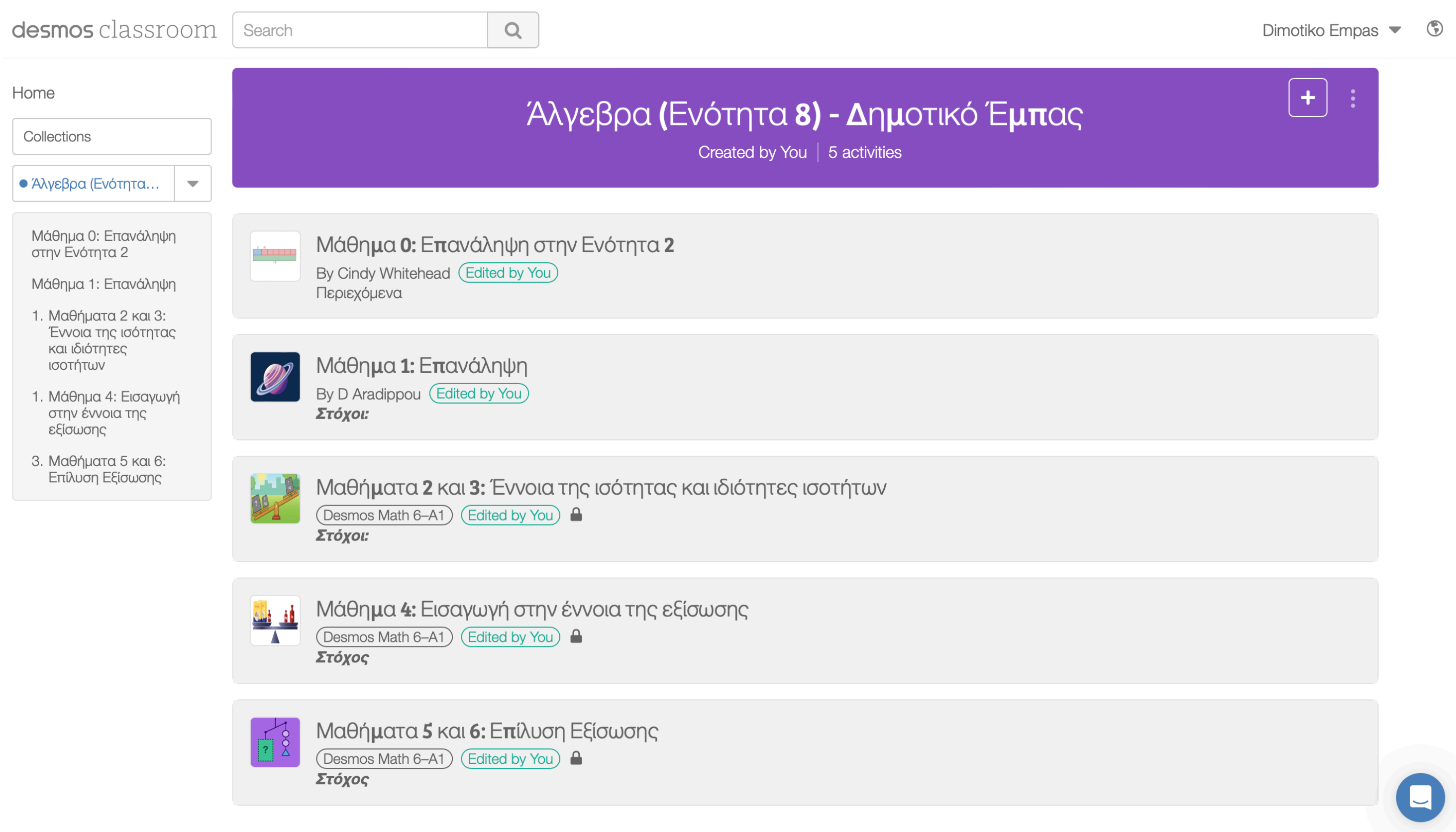
Μελλοντικά Σχέδια

Πιο κάτω δίνονται ιστοσελίδες οι οποίες περιέχουν παραδείγματα από πλατφόρμες που χρησιμοποιούνται σε χώρες της Ευρώπης και της Αμερικής.

- Buncee (https://app.edu.buncee.com/)
- BookWidgets (https://www.bookwidgets.com)
- Desmos (https://www.desmos.com)
- Edulastic (https://edulastic.com/)
- Geogebra (https://www.geogebra.org)
- Go formative (https://goformative.com/)
- Kahoot (https://kahoot.com/)
- Kaizena (https://www.kaizena.com/)
- Naiku (https://www.naiku.net/)
- Nearpod (https://nearpod.com/how-it-works)
- Playposit (https://go.playposit.com/)
- Plickers (https://get.plickers.com/)
- Twinkle (https://www.twinkl.com/)

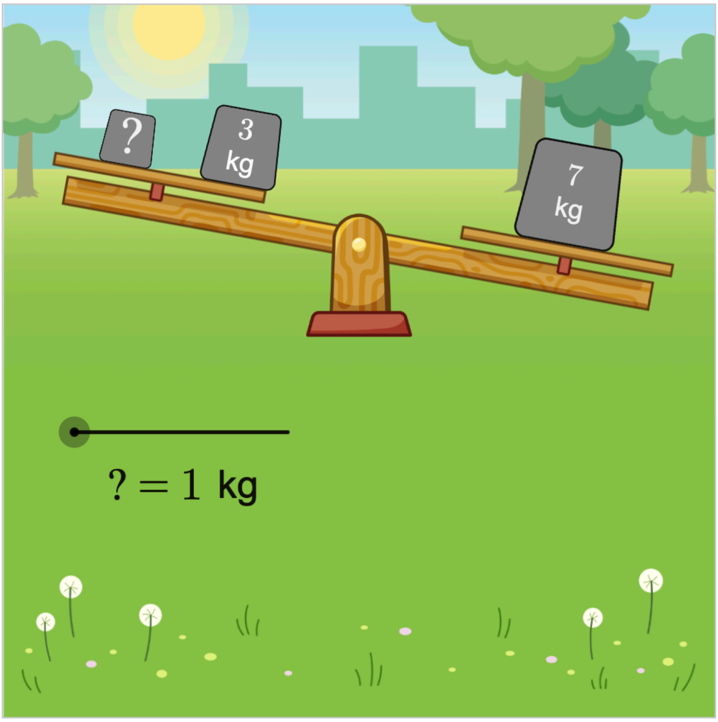
Μελλοντικά Σχέδια

Παράδειγμα Ψηφιακών Μαθημάτων (Στ΄ Δημοτικού - Άλγεβρα)
Πλατφόρμες Desmos - Graspable



Μελλοντικά Σχέδια

ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ

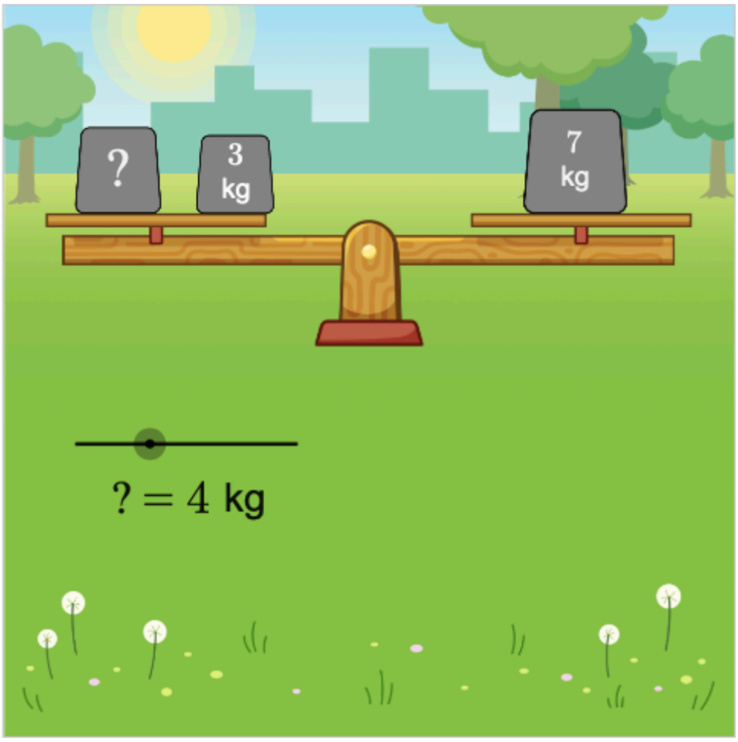


(α) Να μετακινήσετε τον δρομέα σε διάφορες θέσεις. Τι παρατηρείτε;

(β) Πότε η τραμπάλα ισορροπεί; Γιατί συμβαίνει αυτό;

Δείξε στην τάξη την απάντησή σου.

ΕΞΕΡΕΥΝΗΣΗ



Η τραμπάλα ισορροπεί, όταν προκύψει μία **σχέση ισότητας**.

Για παράδειγμα, στη διπλανή εικόνα, η ισότητα που παρουσιάζεται είναι 4 + 3 = 7

(α) Σε ποιες από τις πιο κάτω περιπτώσεις προκύπτει ισότητα και η τραμπάλα ισορροπεί; Να γράψετε Ν (για ΝΑΙ) ή Ο (για ΟΧΙ) στην τελευταία στήλη του πίνακα.

Βαρίδια στη δεξιά πλευρά	Βαρίδια στην αριστερή πλευρά	Ισορροπεί η τραμπάλα;
$5\ kg + 3\ kg$	$8\ kg$	
$10\ kg$	$7\ kg + 4\ kg$	
$3 \cdot 5\ kg$	$8\ kg + 7\ kg$	
$18\ kg$	$9\ kg + 9\ kg$	

Πίνακας Περιεχομένων

Ερωτήσεις

Ευχαριστώ για την προσοχή σας!