Κουτιά για χυμούς

Ζωή Δεληφωτάκη

Βασιλική Μίχου

Ελένη Σπάχου

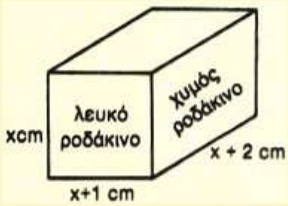
Πρόβλημα

Πρόβλημα από το σχολικό βιβλίο Άλγεβρα Β΄ Λυκείου

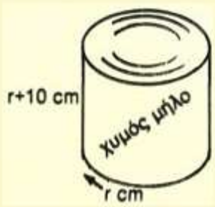
«Πολυωνυμικές εξισώσεις»

13. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μικρά δοχεία για χυμούς φρούτων. Το τμήμα σχεδιασμού του εργοστασίου έλαβε τρείς παραγγελίες:

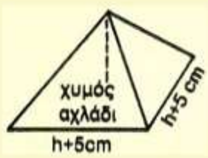
α) Ο πρώτος πελάτης θέλει κουτιά που να χωρούν 200ml χυμού και με διαστάσεις, που να διαφέρουν κατά 1cm, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδειχθεί ότι το τμήμα έχει να λύσει την εξίσωση $x^3 + 3x^2 + 2x - 200 = 0$. Μπορείτε να τους βοηθήσετε να βρουν το x με προσέγγιση ενός mm.



β) Ο δεύτερος πελάτης θέλει τενεκεδάκια κυλινδρικά που να χωρούν 1lit, και να έχουν ύψος 10cm μεγαλύτερο από το μήκος της ακτίνας τους, Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή τη φορά είναι $r^3 + 10r^2 - 318 = 0$ και να βρεθεί το r με προσέγγιση ενός mm. (Να πάρετε $\frac{1000}{\pi} \approx 318$).



γ) Ο τρίτος πελάτης ζήτησε κουτιά σε σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας, που να χωρούν 250ml, με πλευρά βάσης 5cm μεγαλύτερη από το ύψος. Να βρεθεί η εξίσωση και στη συνέχεια μια κατά προσέγγιση τιμή του ύψους h (προσέγγιση χιλιοστού).



Μοντελοποίηση προβλήματος

Οι μαθητές της Β’ Λυκείου του ΓΕΛ Πολυγύρου πραγματοποίησαν εκπαιδευτική εκδρομή σε ένα εργοστάσιο κατασκευής μικρών χάρτινων κουτιών για χυμούς φρούτων. Ο υπεύθυνος κατασκευής τους εξήγησε ότι οι ατομικοί χυμοί των 200ml συσκευάζονται σε κουτιά που είναι παραλληλεπίπεδα, με τις τρεις διαστάσεις τους να διαφέρουν κατά 1cm. Οι ατομικοί χυμοί των 250ml συσκευάζονται σε κουτιά που έχουν σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας, με μήκος βάσης 5cm μεγαλύτερο από το ύψος της. Θα μπορούσαν να βρουν μαθηματικά μοντέλα ώστε να υπολογίσουν τις διαστάσεις των κουτιών με προσέγγιση χιλιοστού; Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα μέρος του χαρτονιού κατασκευής στην πυραμίδα χάνεται λόγω του ιδιαίτερου σχήματός της, αλλά και στο παραλληλεπίπεδο απαιτείται 20% παραπάνω χαρτόνι από το ολικό εμβαδόν του κουτιού λόγω των πολλών ενώσεων ακμών, θα μπορούσε να βρεθεί ποια συσκευασία συμφέρει να προωθεί το εργοστάσιο για ατομικούς χυμούς, δεδομένων ότι:

- το κουτί σε σχήμα πυραμίδας είναι πιο ελκυστικό και λειτουργεί ως διαφήμιση για το εργοστάσιο, και
- αν το επιπλέον χαρτόνι που απαιτείται για τη μια ή την άλλη συσκευασία είναι λιγότερο από $5m^2$,τότε αυτό δεν επηρεάζει την επιλογή.

Μπορούν να βρουν το μαθηματικό μοντέλο για τη ποσότητα του χυμού που μπορεί να συσκευαστεί χωρίς να επηρεάζει την επιλογή της συσκευασίας;

Ανάλυση

Το παραπάνω πρόβλημα παρουσιάζεται στην Άλγεβρα Β' Λυκείου στην ενότητα πολυωνυμικές εξισώσεις και στην επέκταση του για να γίνει ανοικτό απαιτεί και γνώσεις από τη Γεωμετρία στερεών της ίδιας τάξης. Είναι πρόβλημα της καθημερινής ζωής συνδεδεμένο με τις σχολικές δραστηριότητες των μαθητών και συνδέει τα μαθηματικά με παραγωγικούς τομείς της ανθρώπινης δραστηριότητας, δείχνοντας ότι, πίσω από τα αφηρημένες μαθηματικές έννοιες κρύβονται μαθηματικά μοντέλα τα οποία επιλύουν προβλήματα παραγωγής και ανάπτυξης. Επίσης ένα πρόγραμμα δυναμικής γεωμετρίας με το οποίο θα προσομοιωθούν οι κατασκευές των γεωμετρικών στερεών ως κουτιά χυμών, δείχνει την εικόνα και συμβάλλει στην επιλογή του κουτιού το οποίο θα χρησιμοποιηθεί τελικά για τη συσκευασία. Η δυσκολία ως προς το χειρισμό των Νέων Τεχνολογιών θα λυθεί με τη βοήθεια του καθηγητή ο οποίος θα υποδείξει τρόπους κατασκευής ή θα επιβεβαιώσει προϋπάρχουσες γνώσεις των μαθητών.

Το αρχικό πρόβλημα είναι από το σχολικό βιβλίο Άλγεβρα Β΄ Λυκείου «Πολυωνυμικές εξισώσεις» και βοηθά στην ανάπτυξη της ικανότητας των μαθητών στην επίλυση προβλημάτων. Οι εξισώσεις είναι ένα πεδίο το οποίο συνήθως αντιμετωπίζεται από τους μαθητές διαδικαστικά, με τυποποιημένες στρατηγικές επίλυσης και με στόχο να βρεθεί ένα αριθμητικό αποτέλεσμα για λύση της εξίσωσης, χωρίς αυτό να συνδέεται με ρεαλιστικές εφαρμογές.

Στα αναλυτικά προγράμματα σπουδών του Λυκείου, η επίλυση των προβλημάτων έχει ως στόχο την κατανόηση των ενεργειών "χρησιμοποιώ μαθηματικά μοντέλα για να αναπαραστήσω πραγματικές καταστάσεις και να επιλύσω προβλήματα"," ελέγχω την λογικότητα της απάντησής μου και επιβεβαιώνω ότι η απάντησή μου είναι δικαιολογημένη", "χρησιμοποιώ εργαλεία των Μαθηματικών για να εμβαθύνω στην κατανόηση μαθηματικών εννοιών, να εξερευνώ και να κάνω εικασίες".

Το πρόβλημα όπως έχει επεκταθεί, έχει μετατραπεί σε ανοικτό, γιατί οι μαθητές κατά την επίλυσή του καλούνται να κάνουν εκτιμήσεις σύμφωνα με τα δεδομένα, και μετά από υπολογισμούς και άλλες παραμέτρους (πχ αισθητική του κουτιού) συνεκτιμούν και καταλήγουν πιθανόν σε διαφορετικές προσεγγίσεις ως προς τη λύση, αποφασίζοντας ίσως διαφορετικά για την επιλογή του κουτιού στο οποίο τελικά θα συσκευαστεί ο χυμός.

Μέθοδος διδασκαλίας

Η δραστηριότητα θα αναπτυχθεί σε τρεις φάσεις και το σχεδιάγραμμα των εργασιών θα παρουσιαστεί με τον πίνακα3.

$1^{η}$ φάση

Στην τάξη θα λυθεί το αρχικό πρόβλημα του βιβλίου και οι μαθητές με τη βοήθεια του καθηγητή, θεωρώντας δεδομένη την χωρητικότητα σε ml της κάθε συσκευασίας , θα κατασκευάσουν το μαθηματικό μοντέλο (πολυωνυμική εξίσωση) της κάθε συσκευασίας, σύμφωνα με τις πληροφορίες που δίνονται για τη σχέση των διαστάσεων των δύο συσκευασιών. Στο κουτί "παραλληλεπίπεδο με χωρητικότητα 200 ml", οι τρεις διαστάσεις διαφέρουν κατά 1cm, άρα, x(x+1)(x+2)=200 …..και στο κουτί "πυραμίδα με χωρητικότητα 250 ml", η βάση είναι 5cm μεγαλύτερη του ύψους, άρα $\frac{1}{3}(h+5)^2 \cdot h = 250$……. Θα εφαρμόσουν το θεώρημα Bolzano και τελικά θα βρουν τις διαστάσεις των κουτιών με προσέγγιση χιλιοστού.

2η φάση

Η εργασία θα αναπτυχθεί κατά το μεγαλύτερο μέρος στο εργαστήριο της πληροφορικής. Οι μαθητές θα χωριστούν σε δυο βασικές ομάδες, η κάθε μια από τις οποίες θα ασχοληθεί με τα χαρακτηριστικά του καθενός από τα δύο κουτιά.

Ο υπεύθυνος της κάθε ομάδας (συντονιστής) θα φροντίσει για το χωρισμό της ομάδας του σε υποομάδες που η κάθε μια θα αναλάβει συγκεκριμένη εργασία ανάλογα με τις γνώσεις των μελών της. Στο εργαστήριο λειτουργεί η ψηφιακή τάξη, οπότε, η on-line επικοινωνία μεταξύ των υποομάδων της ίδιας ομάδας θα βοηθά στην ανταλλαγή απόψεων και πληροφοριών και με την αμεσότητα της συνεργασίας θα διευκολύνεται η πρόοδος των εργασιών.

Η ομάδα που υπερτερεί στη γνώση του λογισμικού θα προσομοιώσει την κατασκευή των κουτιών σχεδιάζοντάς τα δυναμικά με χρήση δρομέων, οπότε, θα δώσει πληροφορίες για την αλληλεπίδραση των διαστάσεων με τη χωρητικότητα . Το λογισμικό είναι εφοδιασμένο με υπολογιστικό φύλλο, και εξάγονται άμεσα οι συγκεκριμένες πληροφορίες από τις αυτοματοποιημένες μετρήσεις

Ο συντονιστής της κάθε ομάδας θα παρουσιάσει τις κατασκευές geogebra.

Κατασκευή πυραμίδας : pyramida.ggb

Κατασκευή παραλληλεπιπέδου : parallilepipedo.ggb

3η φάση

Η κάθε μια από τις δυο ομάδες προώθησης, αφού πάρει τα δεδομένα από την αντίστοιχη ομάδα κατασκευής, θα τα μελετήσει και θα προσπαθήσει να πείσει για την επιλογή του δικού της κουτιού για την παραγγελία.

Στην δυναμική παρουσίαση της κάθε κατασκευής θα δείχνεται το χαρτόνι που απαιτείται για κάθε κουτί, μετρημένο από το λογισμικό σε m2 , αλλά, και το χαρτόνι που χάνεται από την κάθε συσκευασία είτε, λόγω του σχήματος είτε λόγω των συγκολλήσεων μεταξύ των ακμών.

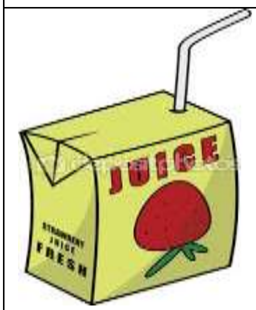
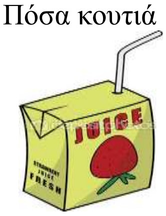
Η κάθε ομάδα θα συγκεντρώσει τα δεδομένα και θα κάνει υπολογισμούς. Πόσα κουτιά θα χρειαστεί για να συσκευάσει μια μεγάλη ποσότητα χυμού; Πόσο χαρτόνι θα χρειαστεί συνολικά; Η ποσότητα του χυμού που θα συσκευαστεί τελικά διαφοροποιεί τα δεδομένα απαίτησης για το χαρτόνι που θα ξοδευτεί για τη μια ή την άλλη συσκευασία; Άρα η ποσότητα του χυμού επηρεάζει την επιλογή; Αν τα κουτιά συσκευασίας είναι του ενός λίτρου διαφοροποιούν την επιλογή;

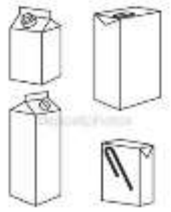
Τελικά ο συντονιστής από την κάθε ομάδα θα επιχειρηματολογήσει, θα παρουσιάσει όλες τις δυνατές περιπτώσεις και θα υποστηρίξει τη δική του κατασκευή.

Αξιολόγηση

Ο καθηγητής κατά την εξέλιξη της δραστηριότητας παρακολουθεί, ενθαρρύνει και αξιολογεί κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι. Θα αξιολογήσει αν η σύγκριση των εργασιών ανέπτυξε την κριτική σκέψη των μαθητών για την καλύτερη επιλογή, και εάν, η παραδοχή της καλύτερης επιλογής αξιοποιήθηκε ώστε να οδηγήσει στην ανατροφοδότηση των εργασιών στα σημεία που υστερούν. Επίσης, ο εκπαιδευτικός θα αξιολογήσει τον τρόπο που προσέγγισαν τη λύση του προβλήματος, θα αξιολογήσει τις δεξιότητες μοντελοποίησης για τον ορισμό των μεταβλητών, και εάν η μαθηματική μέθοδος που ακολούθησαν είναι έγκυρη και ακριβής ώστε να οδηγήσει στη σωστή λύση.

Πίνακας3: Συνοπτική παρουσίαση

Ποσότητα χυμού προς συσκευασία		Ποιο να διαλέξω	;;;;;;;;;;
			
	Χωρητικότητα ατομικού χυμού 250ml	Πόσο χαρτόνι απαιτείται για το κουτί πυραμίδα; 	Πόσο χάνεται; Υπολογίζεται………….. 
	Χωρητικότητα ατομικού χυμού 200ml	Πόσο χαρτόνι απαιτείται για το κουτί παραλληλεπίπεδο; 	Πόσο χάνεται; Πολλές ενώσεις………….
		Πόσα κουτιά ; 	Πόσα κουτιά ; 

	Πόσα τεραγωνικά μέτρα χαρτόνι θα χρειαστούν τελικά Για τη μια ή την άλλη συσκευασία ;		Ποια συσκευασία συμφέρει τελικά;