

Το μέγεθος της σκιάς

Κύρβη Δέσποινα – Ιωάννα

Σιάσου Δήμητρα

Τσιπουρά Φωτεινή

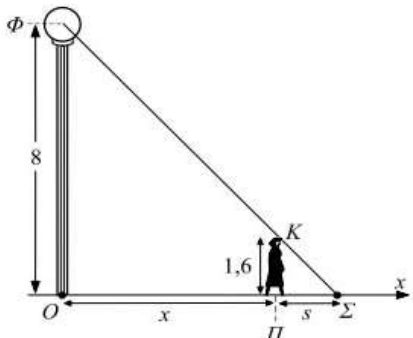
Πρόβλημα

1.1. Α' Μέρος (Επιλογή/ τροποποίηση /κατασκευή προβλήματος)

Πρωτότυπο πρόβλημα:

Το πρόβλημα 3 είναι τροποποίηση του προβλήματος του σχολικού βιβλίου (Γ' Λυκείου, Μαθηματικά Προσανατολισμού, βιβλίο μαθητή, Κεφάλαιο Διαφορικού Λογισμού, παράγραφος 2.4 «Ρυθμός μεταβολής», σελ.244, Β' Ομάδα, άσκηση 5) που παρουσιάζεται στην συνέχεια:

5. Μία γυναίκα ύψους 1,60m απομακρύνεται από τη βάση ενός φανοστάτη ύψους 8m με ταχύτητα 0,8m/s. Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της;



Το πρόβλημα του σχολικού βιβλίου από κλειστό πρόβλημα εκτέλεσης συγκεκριμένων βημάτων επίλυσης προβλήματος έγινε ανοιχτό πρόβλημα μοντελοποίησης ως εξής:

Πρόβλημα μοντελοποίησης:

«Με ποια ταχύτητα πιστεύετε ότι αυξάνεται το μέγεθος της σκιάς σας;»

Η ταξινόμηση του προβλήματος, με βάση τα κριτήρια που ήδη έχουν αναφερθεί, είναι η εξής:

- A. ως προς την **περιοχή του πραγματικού κόσμου** (1^η ταξινόμηση) ταξινομείται στην καθημερινή ζωή. Οι μαθητές έχουν οικειότητα με το φαινόμενο της σκιάς

τους, παρ' όλα αυτά δεν έχουν επαρκείς γνώσεις όσον αφορά την συσχέτιση της με την έννοια της αναλογίας και των ορθογωνίων τριγώνων. Υπάρχει το ενδεχόμενο τα παιδιά που ασχολούνται με το σχέδιο, να έχουν μία καλύτερη εικόνα της αναπαράστασης της σκιάς, χωρίς απαραίτητα να γνωρίζουν το μαθηματικό υπόβαθρο ώστε να αιτιολογήσουν πλήρως τον σχεδιασμό και τις ακριβείς διαστάσεις/σχέσεις μεταξύ του εικονιζόμενου και της σκιάς του που θα αποτυπώσουν στο χαρτί. Μέσω αυτού του έργου οι μαθητές θα αποκτήσουν περισσότερες γνώσεις σχετικά με την ομοιότητα τριγώνων, τις αναλογίες, την τριγωνομετρία και τον ρυθμό μεταβολής. Θα συσχετίσουν μεταξύ τους τις παραπάνω μαθηματικές έννοιες όπως και με την καθημερινότητά τους. Εξαιτίας της μοντελοποίησης που θα κληθούν να κάνουν, θα «ανακαλύψουν» μόνοι τους τις έννοιες και θα τις κατανοήσουν εννοιολογικά και σε ανώτερο επίπεδο.

- B. Ως προς τις επίσημες προδιαγραφές του προγράμματος σπουδών (2^η ταξινόμηση), το έργο έχει εφαρμογή σύμφωνα με αυτές και συμβαδίζει με το επίπεδο της τάξης, το σχολικό πρόγραμμα σπουδών και την επίσημη αξιολόγηση γενικά. Μιλώντας πιο ειδικά, το περιεχόμενο αφορά την επίλυση προβλήματος με την προσέγγιση του ρυθμού μεταβολής ως υπολογισμό παραγώγου συνάρτησης, των μαθηματικών προσανατολισμού της Γ' Ενιαίου Λυκείου όπως και των μαθηματικών γενικής Γ' Ενιαίου Λυκείου και Γ' Επαγγελματικών Λυκείων, συνδυαστικά όμως και με τις γνώσεις γεωμετρίας και τριγωνομετρίας που συνάντησαν τελευταία φορά στην Β' Λυκείου και πιο συγκεκριμένα στην Άλγεβρα και στην Ευκλείδεια Γεωμετρία (προηγούμενη τάξη). Κρίνεται σημαντικό λόγω της προτίμησης αυτών των μαθηματικών πεδίων τα τελευταία χρόνια (ειδικότερα τα έτη 2017 και 2018) στις Πανελλαδικές Εξετάσεις (ειδική επίσημη αξιολόγηση). Ως προς τον διαθέσιμο χρόνο, οι μαθητές της Γ' Τάξης αφενός είναι πεισμένοι εξαιτίας του προσωπικού προγράμματος μελέτης τους και συνεπώς των μειωμένο αριθμό ελεύθερων ωρών τους, αφετέρου όμως αφιερώνοντας κάποιες ώρες σε αυτό το έργο που αποτελεί συμπύκνωση, συνδυασμό και αλληλοσύγκριση τριών μαθηματικών περιοχών (Ανάλυση, Άλγεβρα και Γεωμετρία) τους προσφέρεται το πλεονέκτημα της απόδοσης. Έτσι η αφιέρωση κάποιων ωρών εξισορροπείται με το γεγονός ότι θα είναι εμφανής η αποτελεσματικότητα και η παραγωγικότητά τους στις εξετάσεις τους.**

- C. ως προς το **άνοιγμα του έργου** (3^η ταξινόμηση) το πρόβλημα είναι ανοικτό γιατί τα απαραίτητα στοιχεία για την επίλυσή του, λείπουν, και οι μαθητές καλούνται να τα συλλέξουν μόνοι τους και σε συγκεκριμένα σημεία να τα υποθέσουν κιόλας, ώστε να υπάρξουν έτσι και διαφορετικές προσεγγίσεις του προβλήματος και κατ' επέκταση διαφορετικές λύσεις.
- D. ως προς τη **σχετικότητα με τους μαθητές** (4^η ταξινόμηση), η κατάσταση και το πρόβλημα είναι ρεαλιστικά τόσο για τους μαθητές, όσο και για τους εκπαιδευτικούς. Όλοι οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί έχουν παρατηρήσει τις σκιές τους και ειδικά ως παιδιά την έχουν εντάξει σε ψυχαγωγικά παιχνίδια τους. Το ενδιαφέρον αυξάνεται καθώς οι μαθητές μπορούν να ενασχοληθούν με αυτό και κατά την διάρκεια της βόλτας τους, μετατρέποντας το έργο από απλή διαδικαστική ενέργεια σε συμμετοχική, συλλογική και διασκεδαστική διαδικασία.
- E. ως προς τη **μαθηματική περιοχή** (5^η ταξινόμηση) το έργο ανήκει στο πεδίο της ανάλυσης, με βασικά προαπαιτούμενα στοιχεία από το πεδίο της άλγεβρας και της γεωμετρίας. Η περιοχή απαιτεί υψηλές μαθηματικές ικανότητες και με αυτήν την έννοια ο τρόπος με τον οποίο οι μαθητές θα συλλέξουν και θα χρησιμοποιήσουν τα δεδομένα τους και κατ' επέκταση θα μοντελοποιήσουν το πρόβλημά, κρίνεται ιδιαίτερης σημασίας. Αν λάβουμε υπόψη την ελλιπή ικανότητα των μαθητών να ερμηνεύουν τις έννοιες της αναλογίας στην πραγματική ζωή τους, ίσως χρειαστεί να οργανώσουμε ένα μάθημα προκειμένου να υπενθυμίσουμε στα παιδιά την θεωρία της ομοιότητας τριγώνων και την εφαρμογή τους σε καθημερινές καταστάσεις προκειμένου να μπορέσουν να υπολογίσουν την διάσταση του ύψους ενδεχομένως του φανοστάτη χωρίς τη μέτρησή του.

1.2. Β' Μέρος (Καταγραφή της μεθόδου διδασκαλίας του προβλήματος στους μαθητές)

Το πρόβλημα 3 θα διδασκεί στους μαθητές με τον εξής τρόπο: Μία μέρα στο σχολείο, ο καθηγητής προσκαλεί τα παιδιά να μουν σε μία αίθουσα του σχολείου που έχει πολύ λίγα παράθυρα τα οποία τα καλύπτει με κουρτίνα. Στην συνέχεια τοποθετεί ένα φωτιστικό γραφείου πάνω στην έδρα και ζητάει έναν- έναν να περπατήσουν κοντά στην λάμπα. Τους ζητάει να παρατηρήσουν τις σκιές των άλλων. Στην συνέχεια καλεί

τρία παιδιά με διαφορετικό ύψος να περπατήσουν με την ίδια ταχύτητα πάλι μπροστά και στην λάμπα και επιζητά από τους υπόλοιπους να παρατηρήσουν τις σκιές.

Οι μαθητές θα αντιληφθούν ότι υπάρχει μία σχέση ύψους και ρυθμού μεταβολής του μεγέθους της σκιάς τους, το οποίο ίσως να προσπαθήσουν να ερμηνεύσουν με απλοϊκές γνώσεις στην αρχή. Ο καθηγητής ακούει προσεκτικά όλους τους μαθητές και διατηρεί την ησυχία της τάξης ώστε όλοι οι μαθητές να ακούσουν όλες τις απαντήσεις. Έπειτα κάνει μία εισαγωγή σχετικά με το πώς θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε την σκιά με την βοήθεια των μαθηματικών εργαλείων, προετοιμάζοντας τους ουσιαστικά για τη μετάβαση στη μαθηματική περιοχή. Οι μαθητές δειλά ξεκινούν και προτείνουν να κάνουν μετρήσεις, έπειτα όμως στοχάζονται πώς θα μπορούσαν να βρουν έναν άλλον τρόπο να υπολογίσουν χωρίς να μετρήσουν.

Ο καθηγητής κρίνει σκόπιμο εκείνη την στιγμή να τους διατυπώσει το ακριβές ερώτημα που θα ασχοληθούν τις επόμενες μέρες ώστε οι απόψεις τους να γίνουν πιο συγκεκριμένες πάνω στο θέμα που τον ενδιαφέρει και ο ίδιος να απαντάει βοηθητικά αλλά χωρίς να κατευθύνει σε πιο στοχευμένα ερωτήματα. Τους λέει λοιπόν: «Με ποια ταχύτητα πιστεύετε ότι αυξάνεται το μέγεθος της σκιάς σας;». Στη συνέχεια χωρίζει τα παιδιά σε ομάδες και τους ζητάει να εργαστούν συλλογικά.

Τα παιδιά καλούνται πλέον επίσημα να το επεξεργαστούν και να απαντήσουν στο ερώτημα. Θα μπορέσουν τις επόμενες μέρες να παρατηρήσουν βγαίνοντας βόλτα νωρίς το πρωί, το μεσημέρι ή αργά το απόγευμα και το βράδυ τις σκιές τους και να καταγράψουν σε ομάδες τα συμπεράσματα τους. Η διδασκαλία περνάει στην αδιδακτική φάση και ο εκπαιδευτικός ίσως απλά υποστηρίζει τους μαθητές σε τυχόν δυσκολίες και απορίες. Υπάρχει η δυνατότητα να δοθεί ένα σύνολο ερωτημάτων για διευκόλυνση των μαθητών στην οργάνωση των στοιχείων του προβλήματος.

Αναμένεται οι μαθητές να ρωτήσουν με ποια ώρα της ημέρας πρέπει να ασχοληθούν, όπως και να παραπονεθούν ότι ο ήλιος δεν τους βοηθά να παρατηρήσουν την μεταβολή της σκιάς τους. Επίσης φυσικό είναι να μελετήσουν το πρόβλημα το βράδυ σε κάποια περιοχή με φανοστάτη που όμως θα τους κινήσει το ενδιαφέρον στο πώς θα μπορέσουν ενδεχομένως να υπολογίσουν το ύψος του φανοστάτη αφού δεν μπορούν να το μετρήσουν. Ο καθηγητής τότε θα τους παροτρύνει να ψάξουν στο διαδίκτυο πώς υπολόγιζαν από την αρχαιότητα μέχρι και σήμερα ύψη που δεν είχαν την δυνατότητα να μετρήσουν. Τα παιδιά θα ψάξουν, θα ανακαλύψουν εκ νέου την εμπλοκή της γεωμετρίας και της τριγωνομετρίας στο πρόβλημα και στην συνέχεια θα αφού ορίσουν συνάρτηση θα προσπαθήσουν να υπολογίσουν τον ρυθμό μεταβολής με

την βοήθεια παραγώγου, πράγμα που θα το θυμούνται πιο εύκολα μιας και είναι στην ύλη της τάξης τους και πρόσφατα το έχουν διδαχθεί.

1.3.Γ' Μέρος (Διαμορφωτική και συγκριτική αξιολόγηση τις συμπεριφορές των μαθητών)

A. Διαμορφωτική αξιολόγηση:

Η διαμορφωτική αξιολόγηση στη διαδικασία της μοντελοποίησης είναι η αξιολόγηση για μάθηση και γι' αυτό είναι πολύ σημαντικό ο εκπαιδευτικός να μοιραστεί τους στόχους του έργου με τους μαθητές και να προσπαθήσει να αναπτύξει σ' αυτούς δεξιότητες μοντελοποίησης. Σε αυτές περιλαμβάνονται η υποβολή ερωτήσεων, η ανατροφοδότηση, η αυτοαξιολόγηση και αξιολόγηση των συμμαθητών, καθώς και η διαμορφωτική αξιοποίηση της αξιολόγησης που γίνεται για έλεγχο.

Συνεπώς οι μαθητές σύμφωνα με τις παραπάνω παιδαγωγικές πρακτικές θα αξιολογηθούν από τις ερωτήσεις που θα υποβάλλουν κατά την πρόσληψη και επεξεργασία του έργου και από την ανατροφοδότηση που λαμβάνουν από τον εκπαιδευτικό. Επίσης θα αξιολογηθούν από την ικανότητα αυτοαξιολόγησης και αξιολόγησης των συμμαθητών τους στην πορεία οργάνωσης του μοντέλου, αλλά και από τη διαμορφωτική αξιοποίηση της αξιολόγησης που γίνεται για έλεγχο της επίλυσης έργου και των προτεινόμενων λύσεων.

Πιο συγκεκριμένα η διαμορφωτική αξιολόγηση κατά τη διάρκεια της υλοποίησης του έργου μπορεί να γίνει με βάση κατάλληλες ερωτήσεις και υποδείξεις του εκπαιδευτικού, οι οποίες θα εξαρτηθούν από τις πραγματικές καταστάσεις που θα αντιμετωπίσει μέσα στην τάξη.

Τα ερωτήματα - υποδείξεις θα μπορούσαν να είναι:

- Πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε το μήκος του φανοστάτη;
- Πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την ταχύτητα ενός ανθρώπου που περπατάει;
- Θα συνέφερε να χρησιμοποιήσουμε το πυθαγόρειο θεώρημα ή την τριγωνομετρία προκειμένου να υπολογίσουμε το ύψος του φανοστάτη;
- Δοκιμάστε να υπολογίσετε την ταχύτητα αύξησης της σκιάς για διαφορετικά ύψη και διαφορετικές ταχύτητες. Τι παρατηρείτε;
- Μπορείτε να απεικονίσετε γραφικά με την βοήθεια της Ευκλείδειας Γεωμετρίας την σκιά του μαθητή και του φανοστάτη;

- Μπορείτε να υπολογίσετε την ταχύτητα αύξησης της σκιάς ενός αυτοκινήτου κατά την διάρκεια της ημέρας αλλά και της νύκτας;

B. Συγκριτική αξιολόγηση:

Η συγκριτική αξιολόγηση αφορά τα εξής κριτήρια: (1) Οικοδόμηση του μοντέλου, (2) Εργασία με ακρίβεια, (3) Ερμηνεία, (4) Έλεγχος εγκυρότητας και αναστοχασμός, (5) Παρουσίαση, και μπορούν να αναγνωριστούν σ' αυτή ανώτερες και κατώτερες ποιοτικές περιγραφές κατά την εφαρμογή της.

Ακολουθώντας λοιπόν τις ανώτερες ποιοτικές περιγραφές κατά τη συγκριτική αξιολόγηση, θα αξιολογούσαμε τους μαθητές μας στο παραπάνω έργο:

- ως προς το 1ο κριτήριο (Οικοδόμηση του μοντέλου), αν λαμβάνουν καλές αποφάσεις, οι οποίες τους βοηθούν να απλοποιήσουν μία σύνθετη κατάσταση που αντιμετωπίζουν
- ως προς το 2ο κριτήριο (Εργασία με ακρίβεια), αν χρησιμοποιούν τη μαθηματική γλώσσα και τα σύμβολα με ακρίβεια αποφεύγοντας ασαφείς λεκτικές διατυπώσεις
- ως προς το 3ο κριτήριο (Ερμηνεία), αν είναι σε θέση να ερμηνεύσουν τη δοθείσα κατάσταση καλά και με ακρίβεια
- ως προς το 4ο κριτήριο (Έλεγχος εγκυρότητας και αναστοχασμός), αν έχουν καλή κατανόηση και κριτική της δουλειάς τους όσον αφορά την κατανόηση της εγκυρότητας και των περιορισμών του μοντέλου
- ως προς το 5ο κριτήριο (Παρουσίαση), αν δημιουργούν μια περιεκτική παρουσίαση της δουλειάς τους διατυπώνοντας όλα τα στάδια μοντελοποίησης

Επίσης θα μπορούσαμε να αξιολογήσουμε την προσπάθεια των μαθητών ως προς τα παρακάτω κριτήρια:

- Αν κατανόησαν το πρόβλημα.
- Το πώς επιλέγουν να δείξουν τον τρόπο εργασίας τους.
- Αν δίνουν επαρκείς εξηγήσεις για τις υποθέσεις τους ή εξηγούν γιατί επέλεξαν ή απέρριψαν κάποιες πιθανές λύσεις.
- Αν υλοποίησαν σωστά τη μαθηματική μέθοδο που επέλεξαν.
- Αν απαντούν στο τελικό ερώτημα.
- Αν αναρωτήθηκαν για τυχόν επέκταση του προβλήματος.

1.4. Πιθανές λύσεις του προβλήματος

Κατά την διάρκεια της ημέρας τα παιδιά με τη βοήθεια του ηλίου υπολογίζουν το ύψος του φανοστάτη που τους ενδιαφέρει με την βοήθεια της ομοιότητας των τριγώνων:



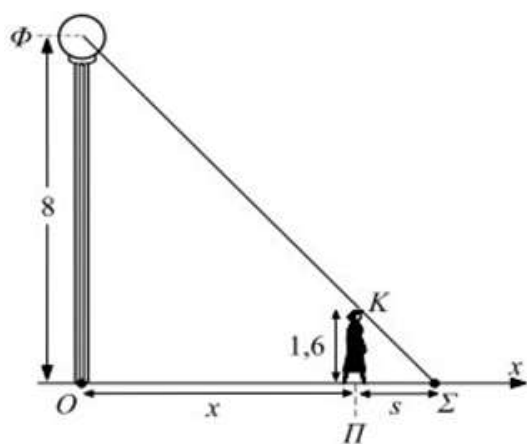
Ένας τρόπος είναι να τοποθετήσουν ένα κομμάτι ξύλου, που έχουν μετρήσει το μήκος του, στο σημείο που οι δύο σκιές (φανοστάτη και ξύλου) συμπίπτουν ως προς το πέρας των σκιών. Στην συνέχεια έχουν δημιουργηθεί δύο όμοια ορθογώνια τρίγωνα και έτσι υπολογίζοντας τον λόγο $\frac{A}{x} = \frac{B}{y}$ βρίσκουν το ύψος του φανοστάτη.

Στην συνέχεια με την βοήθεια ενός χρονομέτρου θα προσπαθήσουν να υπολογίσουν την ταχύτητα του παιδιού διαιρώντας την απόσταση σε μέτρα που έκανε σε ορισμένο χρόνο, με το χρόνο σε δευτερόλεπτα.

Το βράδυ πηγαίνουν πάλι στην ίδια περιοχή και αφού έχουν μετρήσει το ύψος του παιδιού που θα σταθεί για να δημιουργηθεί η σκιά του, θα ορίσουν με την βοήθεια πάλι των όμοιων τριγώνων την σχέση της σκιάς και της απόστασης του παιδιού συναρτήσει του χρόνου.

Πιο συγκεκριμένα:

Έστω ο χρόνος t η ανεξάρτητη μεταβλητή, $x = x(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει την απομάκρυνση (ΟΠ) και $s = s(t)$ η συνάρτηση που εκφράζει τον ίσκιο του παιδιού. Βρίσκεται ότι η ταχύτητα του παιδιού που απομακρύνεται είναι για παράδειγμα $0,8 \text{ m/sec}$. Επομένως: $x'(t) = 0,8$. Θέλουμε να βρούμε το ρυθμό μεταβολής της σκιάς, συνεπώς ψάχνουμε το: $s'(t)$. Έστω ότι οι αριθμοί που προέκυψαν από τις μετρήσεις και τους υπολογισμούς των παιδιών είναι τα εξής: **ύψος φανοστάτη 8m, ύψος παιδιού 1,60m και ταχύτητα απομάκρυνσης του παιδιού 0,8 m/sec**. Από την ομοιότητα των τριγώνων ΣΠΚ, ΣΟΦ υπολογίζουμε τα εξής:



$$\frac{1,6}{8} = \frac{s}{x+s}$$

$$0,2 = \frac{s}{x+s} \Leftrightarrow s = 0,2(x+s)$$

$$0,8s = 0,2x \Leftrightarrow s(t) = \frac{1}{4}x(t)$$

$$s'(t) = 0,25 \cdot 0,8 = 0,2 \text{ m/s}$$

Συνεπώς η ταχύτητα που αυξάνεται ο ίσκιος του παιδιού είναι 0,2m/sec.