

Τα βιβλία των μαθηματικών

ΑΝΘΙΜΟΥ ΣΟΦΙΑ
ΒΑΣΙΛΕΙΑΔΟΥ ΠΗΝΕΛΟΠΗ
ΚΑΤΣΑΒΟΥΝΙΔΟΥ ΚΑΤΕΡΙΝΑ

Πρόβλημα

Το πρόβλημα όπως παρουσιάζεται στο βιβλίο

Διαλέξαμε το κλειστού τύπου πρόβλημα του Κεφαλαίου 45, από το Βιβλίο Μαθηματικών της Δ τάξης, όπου οι μαθητές καλούνται να αξιολογήσουν δεδομένα και ζητούμενα που χρησιμοποιούν για την επίλυσή του.

Τα βιβλία των μαθηματικών φτάνουν στην Καστοριά

🎯 Ποια βήματα ακολουθούμε για να επιλύσουμε ένα πρόβλημα;

-  Διαβάζουμε προσεκτικά το παρακάτω κείμενο :

Ο κ. Μιχάλης είναι 43 χρονών και εργάζεται στη μεταφορική εταιρεία που έχει αναλάβει τη διανομή σχολικών βιβλίων σε όλη την Ελλάδα.

Στις 27 Αυγούστου φόρτωσε στο φορτηγό του, που είχε απόβαρο 1.800 κιλά, βιβλία μαθηματικών με προορισμό την Καστοριά. Το φορτηγό μαζί με το φορτίο του ζυγίζει 5 τόνους και 400 κιλά.

Ο κ. Μιχάλης ξεκίνησε στις 8.00 π.μ. και έφτασε στην Καστοριά (που απέχει 555 χμ. από την Αθήνα) στις 6.00 μ.μ.

α) Αν κάθε εκατοντάδα βιβλίων ζυγίζει 30 κιλά, πόσα βιβλία μετέφερε ο κ. Μιχάλης στην Καστοριά;



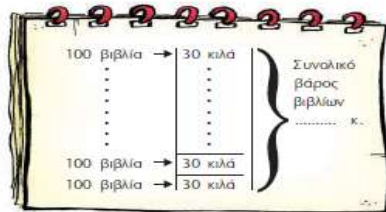
Αξιολογούμε τις πληροφορίες του κειμένου



β) Επιλέγουμε με ✓ όσες από τις παρακάτω πληροφορίες είναι απαραίτητες για ν' απαντήσουμε στο ερώτημα του προβλήματος :

- Ο κ. Μιχάλης είναι 43 χρονών.
- Ο κ. Μιχάλης είναι οδηγός φορτηγού.
- Το φορτηγό ζυγίζει 1.800 κιλά.
- Το φορτηγό μαζί με τα βιβλία ζυγίζουν 5 τόνους και 400 κιλά.
- Ο κ. Μιχάλης ταξίδεψε στις 27 Αυγούστου.
- Ο κ. Μιχάλης ξεκίνησε στις 8.00 π.μ. και έφτασε στις 6.00 μ.μ.
- Η απόσταση Αθήνας - Καστοριάς είναι 555 χμ.
- Κάθε εκατοντάδα βιβλίων ζυγίζει 30 κιλά.
- Ο κ. Μιχάλης μεταφέρει βιβλία Μαθηματικών.

γ) Δοκιμάζουμε διάφορες στρατηγικές! Μπορούμε να φτιάξουμε ένα πρόχειρο σχεδιάγραμμα για να κατανοήσουμε καλύτερα το πρόβλημα.



δ) Οργανώνουμε τις πληροφορίες.

- Συμπληρώνουμε στον πίνακα τα γνωστά στοιχεία. Βάζουμε (:) στη θέση του ζητούμενου στοιχείου.

Βάρος φορτηγού (Α)	Ωφέλιμο φορτίο (Κ.Β.)	Μεικτό Βάρος (Μ.Β.)

ε) Διατυπώνουμε τα απαραίτητα ενδιάμεσα ερωτήματα.

Με τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, δείχνουμε τη σειρά με την οποία πρέπει να εργαστούμε.

Υπολογίζουμε:

- Πόσο ζυγίζουν όλα τα βιβλία (Κ.Β.);
- Πόσες εκατοντάδες βιβλίων μεταφέρει το φορτηγό;
- Πόσα βιβλία μεταφέρει το φορτηγό;
- Το συνολικό βάρος των βιβλίων (Κ.Β.) με πόσες τριαντάδες κιλών γίνεται;



Κάνουμε μια πρόχειρη εκτίμηση του αποτελέσματος.

στ) Επιλέγουμε με ✓ :

Το φορτηγό μεταφέρει περίπου:

- 10 εκατοντάδες βιβλίων.
- 200 εκατοντάδες βιβλίων.
- 100 εκατοντάδες βιβλίων.

ζ) Υπολογίζουμε με ακρίβεια και επαληθεύουμε:



Άνοιγμα του προβλήματος που προτείνουμε:

Πριν το τέλος της σχολικής χρονιάς όλα τα σχολεία του νομού Θεσσαλονίκης παρέλαβαν τα βιβλία για την νέα σχολική χρονιά. Όμως για τους μαθητές της Δ' τάξης του σχολείου μας, αντί για τα βιβλία των Μαθηματικών παρέλαβαν κατά λάθος 2 φορές τα βιβλία της Γλώσσας! Ο κ. Στέργιος, ο διευθυντής του σχολείου, επικοινωνήσε με την Αποθήκη Σχολικών Βιβλίων στη Σίνδο Θεσσαλονίκης, αλλά του απάντησαν πως δεν έχουν τα συγκεκριμένα βιβλία των Μαθηματικών. Έτσι, ο κ. Στέργιος επικοινωνήσε με τον αποθηκάριο, τον κ. Μιχάλη που βρίσκεται στο Κέντρο Διανομής Σχολικών Βιβλίων ΙΤΥΕ-ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ στην Αθήνα.

Αφού έλεγξε ο κ. Μιχάλης ότι τα βιβλία βρίσκονταν όντως στην αποθήκη της Αθήνας, έπρεπε να αποφασίσει πώς να τα στείλει, όσο πιο γρήγορα και οικονομικά γινόταν.

Βοηθήστε τον κύριο Μιχάλη να βρει την πιο οικονομική λύση, ώστε να αποστείλει το συντομότερο δυνατό τα βιβλία!

1. Ταξινόμηση

α) Περιοχή του πραγματικού κόσμου

Το προτεινόμενο πρόβλημα ανήκει στην περιοχή της καθημερινής ζωής των μαθητών και αφορά επίλυση οικονομικού θέματος. Εμπλέκει και συναισθηματικά τους μαθητές μιας και αποτελεί πρόβλημα του σχολείου τους το οποίο καλούνται να δώσουν λύση άμεσα.

β) Εφαρμογή με τις επίσημες προδιαγραφές του προγράμματος σπουδών

Σύμφωνα με το Πρόγραμμα Σπουδών, το πρόβλημα έχει ως στόχο την ανάπτυξη όλων εκείνων των στρατηγικών για τη συλλογή και επεξεργασία δεδομένων που θα καταστήσουν ικανούς λύτες τους μαθητές σε προβλήματα, με δυνατότητα εφαρμογής και πρακτικής χρήσης των Μαθηματικών στη ζωή τους.

γ) Άνοιγμα του έργου

Το πρόβλημα είναι ανοικτό καθώς δεν δίνει όλα τα δεδομένα που θα έκαναν την επίλυση του πανομοιότυπη του σχολικού βιβλίου. Έτσι, διατυπώνοντας ελεύθερα ενδιάμεσα ερωτήματα μπορούν να δομηθούν υποθέσεις που θα οδηγήσουν στο σχεδιασμό διαφορετικών σεναρίων επίλυσης (πολλές λύσεις).

δ) Σχετικότητα με τους μαθητές

Το πρόβλημα εφαρμόστηκε σε μαθητές της Δ' τάξης σε δημοτικό σχολείο της υπαίθρου της Θεσσαλονίκης και παρουσιάστηκε ως πραγματικό που αντιμετωπίζει το σχολείο μας και ο διευθυντής μας. Χρήζει άμεσης επίλυσης και παροχής βοήθειας στον κ. Μιχάλη τον αποθηκάριο. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι οι μαθητές εργάστηκαν με ιδιαίτερο ζήλο και δεν το αντιμετώπισαν ως πρόβλημα μαθηματικών, αλλά ως πρόβλημα της καθημερινής ζωής τους ρωτώντας χαρακτηριστικά "Κυρία, είναι αλήθεια τώρα;".

ε) Μαθηματική περιοχή

Αριθμοί και πράξεις, συλλογή και επεξεργασία δεδομένων, μετρήσεις βάρους και όγκου.

2. Καταγραφή της μεθόδου διδασκαλίας του προβλήματος στους μαθητές

Το παρόν πρόβλημα μοντελοποίησης εφαρμόστηκε στη Δ' τάξη του Δημοτικού Σχολείου που υπηρετεί η εκπαιδευτικός, σε 3 διδακτικές ώρες. Παρουσιάστηκε ως υπαρκτό πρόβλημα που αντιμετώπιζε το σχολείο, εμπλέκοντας ενεργά και συναισθηματικά τους μαθητές να βοηθήσουν στην επίλυση του προβλήματος.

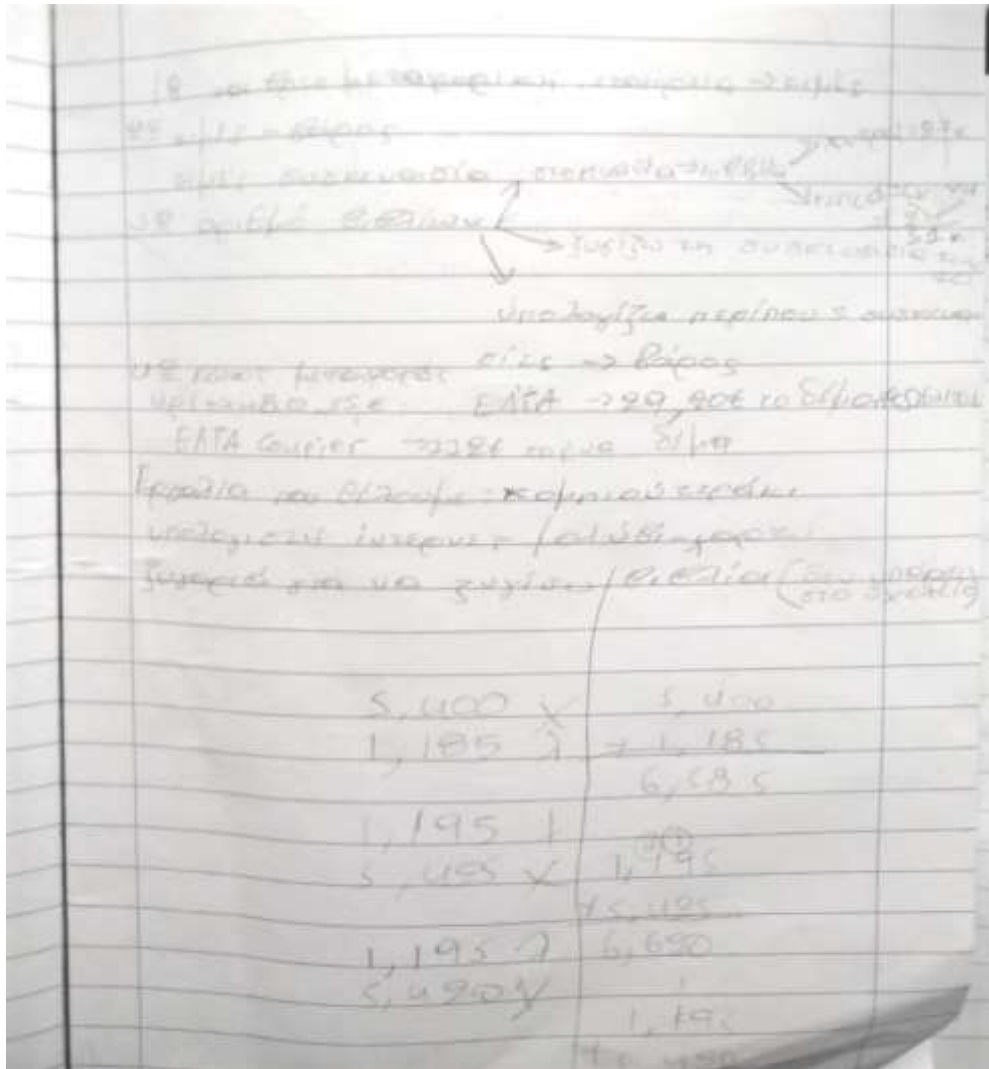
Οι μαθητές χωρίστηκαν σε ομάδες των 4-5 ατόμων. Κάθε ομάδα είχε στη διάθεση της έναν φορητή υπολογιστή που μπορούσαν να τον χρησιμοποιήσουν για άντληση και

διαχείριση διαδικτυακών πληροφοριών, αλλά και ως υπολογιστική μηχανή (δύσκολες πράξεις, πράξεις με ταχύτητα), καθώς επίσης χαρτί, μολύβι και χάρακα.

Το πρόβλημα προβλήθηκε με βιντεοπροβολέα στον πίνακα και διαβάστηκε φωναχτά σε όλη την τάξη από δύο μαθητές. Στη συνέχεια ζητήθηκε από τις ομάδες να συζητήσουν μεταξύ τους τα μέλη για τον καθορισμό των στρατηγικών, τι θα μπορούσαν να κάνουν για να βοηθήσουν τον κ.Μιχάλη. Όλες οι γνώμες των ομάδων καταγράφηκαν στον πίνακα και αξιολογήθηκαν ως προς τη χρησιμότητά τους (π.χ. απορρίφθηκε η λύση να πάμε τα πάρουμε εμείς με το αυτοκίνητο, ή η μεταφορική που δεν έκανε δρομολόγιο για μικρές ποσότητες).

Έτσι, καταλήξαμε στη διαμόρφωση του παρακάτω πλάνου, που γράφτηκε και στον πίνακα και αντιγράφηκε και στα τετράδια των μαθητών (εικόνα 1):

1. Με ποιο τρόπο να αποσταλούν πιο γρήγορα;
2. Να βρούμε μεταφορική εταιρία ή ταχυδρομική υπηρεσία;
3. Μετά τις πληροφορίες αποστολής είδαν ότι έπρεπε να συσχετίσουν τιμές με βάρος και συσκευασία.
4. Σκέφτηκαν να υπολογίσουν τον αριθμό των βιβλίων που θα χρειαστούν για όλη τη Δ' τάξης του σχολείου μας (42 μαθητές) και ότι θα πρέπει να τα "δέσουν".
5. Αποφάσισαν να φτιάξουν συσκευασίες.
6. Να ζυγίσουν τις συσκευασίες των βιβλίων (τη μία των 10 βιβλίων αρχικά, ως σημείο αναφοράς), χρησιμοποιώντας τον ογκομετρητή των μεταφορικών και ταχυδρομικών ιστοσελίδων.
7. Να υπολογίσουν το κόστος της μεταφοράς (νοερά και γραπτά εισάγοντας δεδομένα στις φόρμες υπολογισμού των ιστοσελίδων).
8. Να κατασκευαστεί σε επίπεδο τάξης, ένας πίνακας με τις προσφορές.
9. Τέλος, να γράψουν όλοι οι μαθητές ένα γράμμα, e-mail, στον κ. Μιχάλη που θα του το στείλει ο κ. Στέργιος ο διευθυντής μας και θα τον πληροφορούμε για την έρευνά μας και για την προτεινόμενη λύση μας, αιτιολογώντας την.



εικόνα 1

Στη συνέχεια, οι μαθητές εργάστηκαν στις ομάδες τους, συμφωνώντας η κάθε ομάδα να ασχοληθεί με μία υπηρεσία μεταφορική ή ταχυδρομική. Μπήκαν σε ιστοσελίδες μεταφορικών και αναζήτησαν πληροφορίες αποστολής. Επειδή, οι μαθητές ήρθαν σε επαφή πρώτη φορά με τέτοιου είδους ιστοσελίδες, και οι πληροφορίες αποστολής ήταν σε υποσέλιδα των ιστοσελίδων, υπήρξε προτροπή από τη δασκάλα να ψάξουν να βρουν πληροφορίες σε διάφορες ενότητες- παραθυράκια της ιστοσελίδας για τον τρόπο αποστολής, αλλά και το χρόνο παράδοσης (όλες είχαν 1-3 μέρες πλην μιας που απορρίφθηκε). Κατόπιν υπολόγισαν τον ακριβή αριθμό για όλα τα βιβλία που χρειάζονται (44 Β.Μ. + 4 X 44 Τ.Ε. = 220 βιβλία).

Συσχετίζοντας την τιμή αποστολής με το βάρος, τέθηκαν λοιπόν οι μεταβλητές συνιστώσες του προβλήματος. Οι μαθητές ενεπλάκησαν σε εκτιμήσεις και υπολογισμούς νοερούς, αλλά και γραπτούς συμπληρώνοντας στοιχεία/ πίνακες στην ιστοσελίδα ή υπολογίζοντας στο τετράδιό τους.

Κατόπιν αποφάσισαν να φτιάξουν συσκευασίες (10 βιβλίων αρχικά, όπως συνήθως αποστέλλονται ή λιγότερων, συσκευασίες των 8 βιβλίων σε σχέση με το βάρος και την

προτεινόμενη συσκευασία από την υπηρεσία) και τις “ζύγισαν” με χρήση του ογκομετρητή της σελίδας, μετρώντας τις διαστάσεις (μήκος -πλάτος- ύψος) με χάρακα και συμπληρώνοντας τα δεδομένα σε αντίστοιχο πίνακα της ιστοσελίδας και κάνοντας νοερά τις μετατροπές από γραμμάρια σε κιλά (δέμα 10 βιβλίων Β.Μ.=5.400γρ.=5,400κ., Τ.Ε =1.200γρ.=1,200κ.). Για να χρησιμοποιήσουν τον ογκομετρητή υπολόγισαν τον όγκο του δέματος που δεν έπρεπε να ξεπερνά τα 4κ. σε κάποιες ταχυδρομικές (υπήρχε σχετική επισήμανση όταν το δέμα ήταν μεγαλύτερων διαστάσεων ή κιλών). Έτσι, δύο ομάδες απέκλεισαν τη συσκευασία των 10 βιβλίων και πρότειναν των 8, ενώ όλες οι ομάδες υπολόγισαν τον αριθμό των δεμάτων που θα χρειαστούν. Να σημειωθεί ότι ο όγκος δεν είχε διδαχθεί ακόμη και μέσα από την ανάγκη επίλυσης του προβλήματος, γνώρισαν την έννοια, τα χαρακτηριστικά του και τον τρόπο υπολογισμού του.

Τα αποτελέσματα της κάθε ομάδας ανακοινώθηκαν στην τάξη, ελέγχθηκαν και καταγράφηκαν στον πίνακα. Σε επίπεδο τάξης συντάχθηκε ο ενιαίος πίνακας προσφορών σε τρεις στήλες: τις εταιρείες, τα δέματα/συσκευασίες και το κόστος (εικόνα 2).

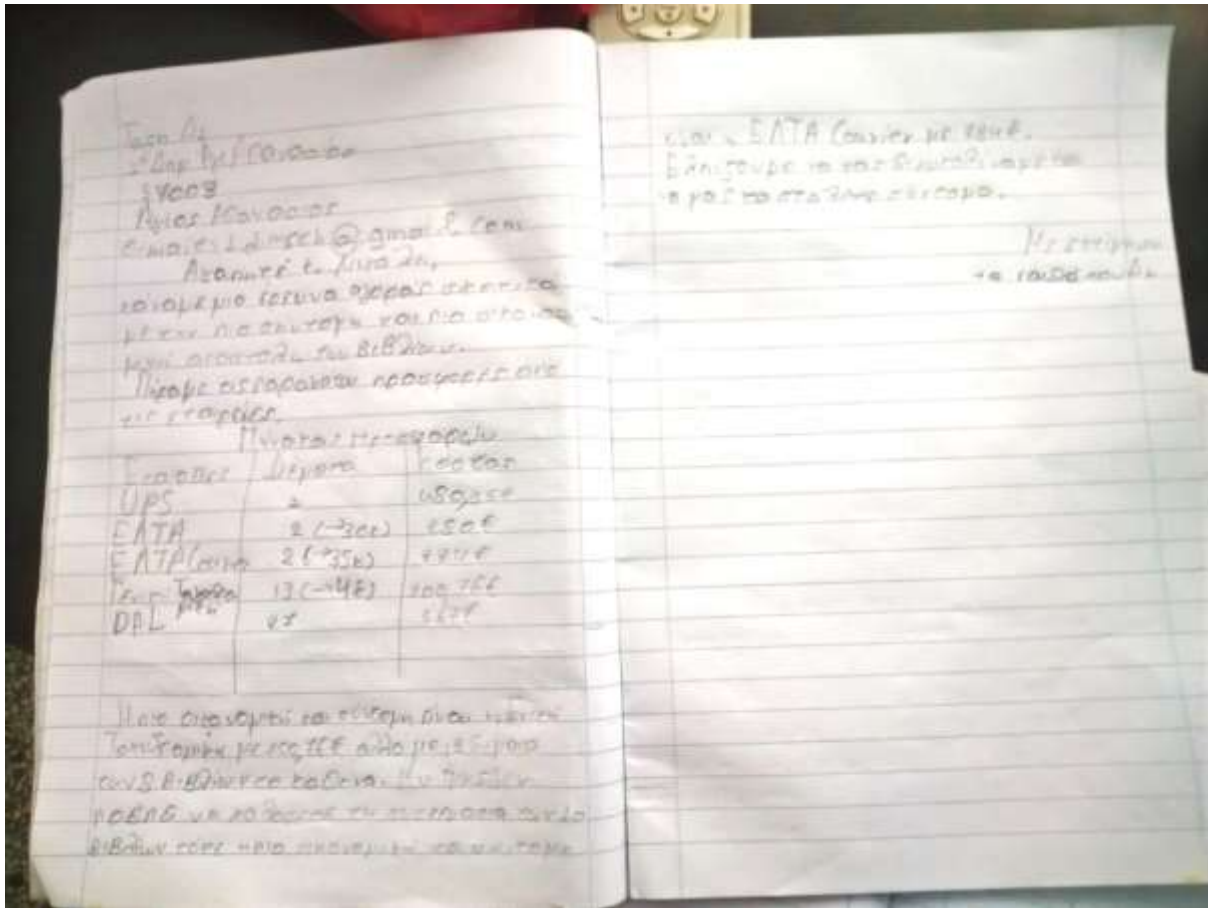
The whiteboard contains handwritten calculations and a table. The calculations on the left determine the volume of a package (44 x 44 x 4 = 176 + 44 = 220 liters) and the cost of shipping 8 packages (220 : 8 = 27.5 liters per package, 27.5 x 2 = 55 liters, 55 x 2 = 110 liters, 110 x 2 = 220 liters). The table on the right lists shipping companies and their offers.

Εταιρείες	Δέματα:	Κόστος
UPS	1	480,35 €
ΕΛΤΑ	2 (→ 30κ)	280 €
ΕΛΤΑ Courier	2 (→ 35κ)	294 €
Γενική Ταχυδρομική	13 (→ 14κ)	200,76 €
DHL	27	567 €

Το πιο φθινό Γενική Ταχυδρομική

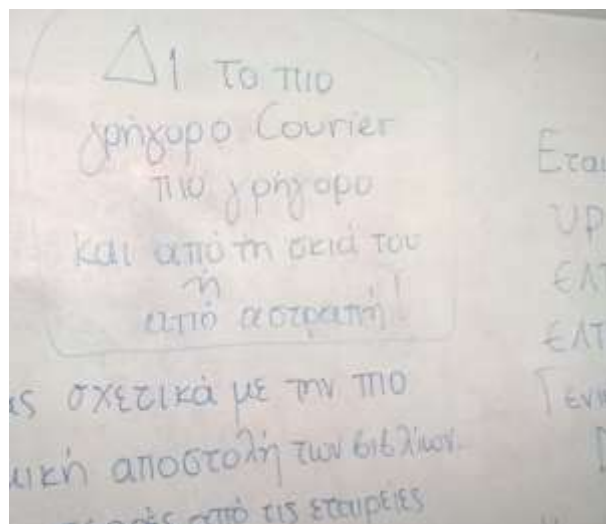
εικόνα 2

Απορρίφθηκαν οι μεταφορικές εταιρείες λόγω του υψηλού κόστους. Επιλέχθηκαν δύο ταχυδρομικές υπηρεσίες, μία γιατί ήταν η οικονομικότερη και μία που συνδυάζε την οικονομία και το περιβαλλοντικό κόστος (λιγότερες συσκευασίες / δέματα, καλό για το περιβάλλον!) και τέλος συντάχθηκε η επιστολή/ e-mail, που δόθηκε στο διευθυντή για να τη στείλει στον κ.Μιχάλη στην Αθήνα! (εικόνα 3).



εικόνα 3

Μετά το πέρας της δραστηριότητας της μοντελοποίησης κάποιος μαθητής είπε “τώρα κυρία μπορούμε να γίνουμε και μεις courier!” και όλοι χάρηκαν. Βρήκαν ακόμη και το “σύνθημα” της εταιρείας μας: “Δ1 το πιο γρήγορο courier, πιο γρήγορο και από τη σκιά του ή από την αστραπή!” (εικόνα 4).



εικόνα 4

3. Αξιολόγηση

α) Διαμορφωτική αξιολόγηση

Κατά την αρχή των εργασιών κρίθηκε πιο λειτουργικό να καταγραφεί στον πίνακα ένα κοινό πλάνο δραστηριοτήτων για όλες τις ομάδες, επειδή ήταν η πρώτη φορά που ήρθαν οι μαθητές σε επαφή με δραστηριότητες μοντελοποίησης και διευκόλυνε και τον ιδεολογικό καταιγισμό τους. Ωστόσο, οφείλουμε να πούμε, πως με βάση προηγούμενες διδασκαλίες ήταν σχετικά εξοικειωμένοι με ανοιχτού τύπου προβλήματα και την ύπαρξη πολλαπλών στρατηγικών επίλυσης προβλήματος.

Οι μαθητές ενθαρρύνθηκαν να κάνουν υποθέσεις (π.χ. ποιο σχέδιο να ακολουθήσουμε για πιθανή λύση), να απορρίψουν υποθέσεις (π.χ. μεταφορά από τους ίδιους) και να διαμορφώσουν νέες (μεταφορά από μεταφορικές εταιρείες) ή να τις αναδιαμορφώσουν (π.χ. συσκευασίες των 8 βιβλίων αντί για 10). Κατά το πρώτο στάδιο της έρευνας, η δασκάλα παρακίνησε τους μαθητές να ασχοληθούν και με τους δύο τύπους εταιρειών, τη μεταφορική και τη ταχυδρομική. Επενέβει υποστηρικτικά όταν ερωτήθηκε σχετικά από τις ομάδες “Κυρία, με τι να το στείλουμε;” παρουσιάζοντας το περιβάλλον της ιστοσελίδα μιας ταχυδρομικής υπηρεσίας που δεν θα εργάζονταν με αυτή οι ομάδες. Δόθηκαν εξηγήσεις ότι υπάρχουν υποσέλιδα/ παράθυρα με πληροφορίες, ερμηνεύτηκαν οι “άγνωστες” λέξεις, όπως αυτή της ογκομέτρησης, ότι στις ηλεκτρονικές πληρωμές μας είμαστε προσεκτικοί κ.α.

Κατά την ενασχόλησή τους με το πρόβλημα, οι υποθέσεις τους διαμορφώνονταν σιγά σιγά σε πιθανές λύσεις, για τις οποίες υπήρχε αυτοαξιολόγηση μέσα στην ομάδα και ετεροαξιολόγηση από τις υπόλοιπες ομάδες και τη δασκάλα της τάξης με θετική κριτική ανατροφοδότηση.

Καθόλη τη διάρκεια των εργασιών στις ομάδες, η δασκάλα παρατηρούσε την εργασία τους και βοηθούσε όταν της το ζητούσαν ανατροφοδοτικά, χωρίς να υποδεικνύει τις λύσεις. Επιχειρηματολογία, ανατροφοδότηση κι αναστοχασμός υπήρξε και κατά τις συζητήσεις των ομάδων, όταν συζητούσαν ή ανακοινώνονταν τα αποτελέσματα.

β) Συγκριτική αξιολόγηση

Αξιολογώντας το πρόβλημα ως πρόβλημα του πραγματικού κόσμου με τον κύκλο της μοντελοποίησης, οι μαθητές έθεσαν ερωτήματα του τύπου πώς θα μεταφερθούν τα βιβλία, με τι θα μεταφερθούν, ποιος θα τα μεταφέρει, εισήγαγαν τις μεταβλητές βάρος, συσκευασία και πως αυτές επηρεάζουν το κόστος μεταφοράς. Με εκτιμήσεις, αριθμητικές πράξεις και υπολογισμούς (νοερούς και μη) υπολόγισαν το κόστος μεταφοράς και κατασκευάζοντας πίνακες σύγκριναν τα αποτελέσματα. Με βιωματικό και εμπειρικό τρόπο αντιμετωπίστηκε και η άγνωστη έννοια του όγκου (χρήση χάρακα, δόμηση συστάδας βιβλίων, εισαγωγή δεδομένων σε φόρμα υπολογισμού). Από τη σύγκριση των αποτελεσμάτων, συζητήθηκε η πιο οικονομική λύση λαμβάνοντας υπόψη τη λογικότητα των αποτελεσμάτων, αλλά θέτοντας και έναν παράγοντα που προέκυψε στο τέλος, το περιβαλλοντικό κόστος, όταν αφού επέλεξαν την πιο οικονομική λύση (“έχουμε κρίση”) διαπίστωσε μια ομάδα πως με τα πολλά πακέτα “μολύνουμε το περιβάλλον!”. Θεωρήθηκε εξίσου ικανοποιητική και η λίγο πιο

ακριβή λύση, αλλά με λίγα πακέτα προς αποστολή, ώστε να μειώσουμε την κατανάλωση χαρτιού και πλαστικού που θα χρησιμοποιούνταν για τη συσκευασία. Τέλος, κατασκευάστηκε και η κάτωθι ρουμπρίκα (0-5, καθόλου έως πολύ ικανοποιητική).

Οικοδομώντας το μοντέλο	Δουλεύοντας με ακρίβεια	Ερμηνεύοντας	Έλεγχος εγκυρότητας και αναστοχασμός	Παρουσίαση
3	4	3	3	3
Οι μαθητές μπορούν να εντοπίσουν και να διαχειριστούν τις απαραίτητες πληροφορίες και παραμέτρους ώστε να αναπτύξουν μία στρατηγική για τη λύση του προβλήματος.	Οι μαθητές χρησιμοποιούν με ακρίβεια τη μαθηματική γλώσσα και τα σύμβολα.	Οι μαθητές ερμηνεύουν τη δοθείσα κατάσταση σε ικανοποιητικό βαθμό.	Οι μαθητές κατανοούν την εγκυρότητα των περισσότερων πτυχών και περιορισμών του μοντέλου.	Οι μαθητές παρουσιάζουν πώς εργάστηκαν συμπεριλαμβάνοντας σημαντικά στοιχεία και λεπτομέρειες της δουλειάς τους.