

Εκτίμηση του αριθμού των αποσκευών λαμβάνοντας υπόψη τη θερμοκρασία

Κατίδης Γεώργιος:	AM 565
Μιχαηλίδου Χριστίνα:	AM 575
Παπαγεωργίου Μαρία:	AM 582
Χαριτίδου Ολυμπία:	AM 594

Η Β' Λυκείου του 2ου ΓΕΛ Κιλκίς θα πραγματοποιήσει πενθήμερη εκπαιδευτική εκδρομή τον μήνα Απρίλιο στην πόλη των Ιωαννίνων. Για την οργάνωση της εκδρομής ο διευθυντής και το 15μελές του σχολείου αποφάσισαν η μετάβαση και η επιστροφή να γίνει αεροπορικώς με "Low Cost" αεροπορική εταιρεία που επιτρέπει τη δωρεάν χρήση χειραποσκευών με μέγιστο βάρος 10 kgr. Η επιπλέον χρήση αποσκευών κοστίζει 20 ευρώ ανά άτομο εκτός αν δεν δηλωθεί με το κλείσιμο των εισιτηρίων, οπότε κοστίζει 50 ευρώ ανά άτομο. Επειδή το κλείσιμο των εισιτηρίων γίνεται το μήνα Δεκέμβριο δεν υπάρχουν προβλέψεις για τη θερμοκρασία το μήνα Απρίλιο, ώστε να γνωρίζουν αν θα πάρουν «βαριά» ρούχα γεγονός που θα επηρεάσει το βάρος των αποσκευών τους. Για θερμοκρασίες κάτω των 7°C και με ταχύτητα ανέμου άνω των 6,5 Km/h η αίσθηση του ψύχους είναι μεγαλύτερη από ότι στην πραγματικότητα και απαιτείται ενισχυμένη χρήση ρούχων από όλους, οπότε και δεύτερη αποσκευή. Αν οι θερμοκρασίες κυμαίνονται από 8 - 12°C μόνο τα κορίτσια του σχολείου θα χρειαστούν και δεύτερη αποσκευή (για οικονομικούς λόγους ανά δύο). Συνολικά οι μαθητές που θα συμμετάσχουν στην εκδρομή είναι 105 εκ των οποίων τα 64 είναι αγόρια. Ο πίνακας μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών (κλιματολογία: περίοδος δεδομένων 1955-1997) για τα Ιωάννινα είναι αναρτημένος στην ιστοσελίδα της ΕΜΥ. Τελευταία στιγμή και για οικονομικούς λόγους άλλαξε ο προορισμός για το νησί της Μυτιλήνης όμως η αναζήτηση των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών της λόγω αναβάθμισης της ιστοσελίδας της ΕΜΥ είχε λιγότερα δεδομένων. Πόσες αποσκευές θα πάρουν οι μαθητές μαζί τους;

Μέθοδος Διδασκαλίας

Το παραπάνω πρόβλημα ανήκει στον πραγματικό κόσμο, δημιουργεί κίνητρα, έχει σχέση με τις άμεσες εμπειρίες των μαθητών και έχει τη δυνατότητα να προκαλέσει την εμφάνιση σημαντικών μαθηματικών ιδεών. Συμπεριλαμβάνει και

άλλους επιστημονικούς κλάδους όπως η κλιματολογία. Είναι σύμφωνη με το αναλυτικό πρόγραμμα σπουδών «*ορίζονται οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις, γίνεται η σύνδεση αυτών με φαινόμενα που εμφανίζουν περιοδικότητα*» (Π.Σ. Μαθηματικών Β' Λυκείου ΦΕΚ 1173,15-5-13) με στόχο να χρησιμοποιούν την έννοια της περιοδικής συνάρτησης και να κατασκευάζουν γραφικές παραστάσεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων (αν και η παράγραφος 3.6 είναι προσωρινά εκτός διδακτέας ύλης) Μπορεί να χαρακτηριστεί ως ανοικτό πρόβλημα, αφού δεν δίνονται όλες οι απαραίτητες πληροφορίες για τη λύση του και οι μαθητές μπορεί να έχουν διαφορετικούς τρόπους προσέγγισης, με βάση τις υποθέσεις που μπορεί να κάνουν ως προς τα δεδομένα που λείπουν. Το πρόβλημα ανήκει στην περιοχή της Άλγεβρας και οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν γνώσεις τριγωνομετρίας για την εκτίμηση της περιοδικότητας της μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας καθώς και της προσομοίωσης της μεταβλητότητας της θερμοκρασίας μέσω κατάλληλης τριγωνομετρικής συνάρτησης. Η γνώση του λογισμικού Geogebra θα βοηθήσει στην επίλυση του προβλήματος. Άλλωστε η μοντελοποίηση και η ανάπτυξη εννοιολογικών συστημάτων μπορούν να ενισχυθούν σε μεγάλο βαθμό από τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών (Lesh, R., & Doerr, H.M. 2003). Η έννοια της μέσης μηνιαίας θερμοκρασίας αναφέρεται σε γνώσεις μέτρων θέσης από τη Στατιστική της Β' Γυμνασίου.

Οι μαθητές που θα διαπραγματευτούν το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι της Β' τάξης γενικού λυκείου στα πλαίσια του μαθήματος της Άλγεβρας. Οι έννοιες που εξετάζονται δεν είναι άγνωστες στους μαθητές. Το πρόβλημα προτείνεται να εξεταστεί μετά τη διδασκαλία των τριγωνομετρικών συναρτήσεων και αφού έχουν ήδη διαπραγματευτεί οι ασκήσεις 1,2 και 3 της Β' Ομάδας του σχολικού βιβλίου. Η μέση μηνιαία θερμοκρασία είναι ήδη γνωστή από τη Β' Γυμνασίου από της Στατιστική. Πιθανόν όμως να μην την έχουν διδαχθεί όλοι οι μαθητές, αφού προέρχονται από διαφορετικά γυμνάσια οπότε μια υπενθύμιση της έννοιας της μέσης τιμής κρίνεται σκόπιμη (οι μαθητές είναι αρκετά εξοικειωμένοι από τη μέση τιμή της βαθμολογίας τους). Τα μαθήματα είναι απαραίτητο να γίνουν σε αίθουσα που περιέχει ηλεκτρονικούς υπολογιστές με εγκατεστημένο το λογισμικό Geogebra.

1η Διδακτική ώρα

Δίνουμε το πρόβλημα στους μαθητές, μελετούν σιωπηρά και αφήνεται αρκετός χρόνος για να σκεφτούν. Οι μαθητές συζητούν και διακρίνουν τις σχέσεις

των μαθηματικών με ιδιαίτερες πτυχές του πραγματικού κόσμου, με αφορμή το πλαίσιο του προβλήματος. Κατόπιν δίνεται σε κάθε μαθητή μια φωτοτυπία με τον παρακάτω πίνακα που περιέχει τα δεδομένα των μέσων μηνιαίων θερμοκρασιών στην πόλη των Ιωαννίνων:

1^ο Εξάμηνο	ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙ	ΙΟΥΝ
Ελάχιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	0.2	1.0	3.2	5.9	9.6	12.8
Μέση Μηνιαία Θερμοκρασία	4.7	6.1	8.8	12.4	17.4	21.9
Μέγιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	10.1	11.5	14.4	17.7	23.0	27.6
2^ο Εξάμηνο	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠ	ΟΚΤ	ΝΟΕ	ΔΕΚ
Ελάχιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	14.9	15.0	12.2	8.5	4.7	1.8
Μέση Μηνιαία Θερμοκρασία	24.8	24.3	20.1	14.9	9.7	5.9
Μέγιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	30.8	30.9	26.7	21.2	15.5	11.1

Οι μαθητές χωρίζονται με βάση την επιλογή τους σε 6 ομάδες όπου ανά δύο οι ομάδες επιλέγουν την ελάχιστη, τη μέγιστη ή τη μέση μηνιαία θερμοκρασία, τους δίνεται τόσο τετραγωνισμένο (μιλμετρέ) χαρτί όσο και δυνατότητα πρόσβασης σε υπολογιστή. Ζητείται από κάθε ομάδα να δώσουν εναλλακτικούς τρόπους παρουσίασης των δεδομένων αυτών. Οι μαθητές αφού έχουν ήδη έρθει σε επαφή με τις γραφικές παραστάσεις αναμένεται έστω και μετά από λίγο χρόνο να προβούν στη χρήση συστήματος συντεταγμένων για να παρουσιάσουν τα δεδομένα του πίνακα. Το δύσκολο θα είναι να περάσουν από τα μεμονωμένα σημεία σε μια συνεχή καμπύλη. Εκεί ενδεχομένως αν δούμε πως υπάρχει στασιμότητα να τους βοηθήσουμε λέγοντας τους να μπουν στη σελίδα της μετεωρολογικής υπηρεσίας. Εκεί σε συνδυασμό με τον πίνακα δίνεται και η καμπύλη της ετήσιας κατανομής των θερμοκρασιών (πάντα μέσες τιμές για την περίοδο κανονικότητας, όπως ονομάζεται στην κλιματολογία, 1955-1997).

Στη συνέχεια αναμένεται οι μαθητές προκειμένου να μπορέσουν να χαράξουν και την αντίστοιχη καμπύλη για την Μυτιλήνη να αναλογιστούν πως θα καλύψουν τον πρόβλημα των ελλειπουσών τιμών (missing values). Εκεί λοιπόν αν και η καμπύλη προσομοίωσης στο μιλμετρέ χαρτί θα είναι αρκετά εύκολο να χαραχθεί αναμένεται να προβληματιστούν με τον τύπο της καμπύλης. Λογικό είναι να πειραματιστούν με πολλές και διαφορετικές συναρτήσεις για παράδειγμα πολυωνυμικές. Το ίδιο εξάλλου κάνουν ακόμα και οι ερευνητές και αυτός είναι και ο στόχος της δραστηριότητας ο πειραματισμός και η εκτίμηση μέσω προσομοίωσης. Θα χρειαστεί να ανακαλέσουν γνώσεις από φυσική ή ενδεχομένως να προκληθεί μια

συζήτηση σε σχέση με τον καιρό και τις μεταβλητές που τον περιγράφουν. Τι φαινόμενο είναι; Ίσως να αναφερθεί ότι η μέση θερμοκρασία είναι περιοδικό φαινόμενο ώστε να εισάγουν συνάρτηση ημιτονοειδούς μορφής $f(x) = \alpha \sin(\beta x + \gamma) + \delta$ και μεταβάλλοντας τις παραμέτρους θα βρουν τη βέλτιστη προσέγγιση, ενώ το λογισμικό τους επιτρέπει σε κάθε προσέγγιση να βλέπουν τις μεταβολές στον τύπο της συνάρτησης και την αλληλεπίδραση γραφικής με συμβολική αναπαράσταση.

Οι μαθητές δουλεύουν στο δυναμικό περιβάλλον του προγράμματος, συζητούν μεταξύ τους και ανταλλάσσουν τα συμπεράσματά τους με τις άλλες ομάδες και καταλήγουν στη καλύτερη προσέγγιση για την συνάρτηση με την οποία θα εργαστούν την επόμενη διδακτική ώρα (την αποθηκεύουν).

2η Διδακτική ώρα

Κατά τη 2η διδακτική ώρα οι μαθητές θα εξασκηθούν στις τριγωνομετρικές γραφικές παραστάσεις. Η ώρα αυτή δεν εμπίπτει αμιγώς στο χαρακτήρα της μοντελοποίησης αλλά κρίνεται απαραίτητη να γίνει ώστε μέσω του προβλήματος να επιτευχθούν και οι στόχοι του αναλυτικού προγράμματος σε σχέση με τη χάραξη γραφικών παραστάσεων και την εμβάθυνση στις μετατοπίσεις τους και στις αλλαγές στην περίοδο τους. Η κατανόηση πραγματοποιείται έχοντας οι μαθητές κατά νου το αρχικό πρόβλημα άρα βλέποντας τη σύνδεση με την πραγματικότητα (ρεαλιστικά μαθηματικά).

Οι μαθητές των ομάδων ανοίγουν το αποθηκευμένο αρχείο και απαντούν σε ερωτήσεις με στόχο να κατανοήσουν το ρόλο των παραμέτρων αφού εισάγουν με τη βοήθεια δρομέων την εξίσωση $f(x) = \alpha \sin(\beta x + \gamma) + \delta$

- 1) Ποια είναι η περίοδος της συνάρτησης;
- 2) Υπολογίστε την κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης
- 3) Υπολογίστε την διαφορά φάσης για τη συνάρτηση
- 4) Υπολογίστε το εύρος της συνάρτησης
- 5) Με βάση τα παραπάνω κατασκευάστε εξίσωση της μορφής $f(x) = \alpha \sin(\beta x + \gamma) + \delta$ και δοκιμάστε τις τιμές της για $x=1, 2, \dots, 12$ με ακρίβεια τριών δεκαδικών. Τι παρατηρείτε;

3η Διδακτική ώρα

Οι μαθητές χωρίζονται εκ νέου με τυχαίο τρόπο κάνοντας χρήση καρτελών χρωμάτων σε 6 ομάδες και αυτή τη φορά δίνεται ο νέος πίνακας που αφορά στη Μυτιλήνη και έχοντας χάσει τις θερμοκρασίες για τους μήνες Μάρτιο και Απρίλιο:

1 ^ο Εξάμηνο	ΙΑΝ	ΦΕΒ	ΜΑΡ	ΑΠΡ	ΜΑΙ	ΙΟΥΝ
Ελάχιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	6.7	7.0			15.2	19.3
Μέση Μηνιαία Θερμοκρασία	9.5	9.9			20.2	24.7
Μέγιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	12.1	12.6			23.9	28.5
2 ^ο Εξάμηνο	ΙΟΥΛ	ΑΥΓ	ΣΕΠ	ΟΚΤ	ΝΟΕ	ΔΕΚ
Ελάχιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	21.6	21.4	18.5	14.8	11.4	8.7
Μέση Μηνιαία Θερμοκρασία	26.6	26.1	22.9	18.5	14.3	11.3
Μέγιστη Μηνιαία Θερμοκρασία	30.4	30.2	26.7	21.7	17.2	13.8

Οι μαθητές διαβάζουν το αρχικό πρόβλημα και προσπαθούν να δώσουν απάντηση χρησιμοποιώντας τα συμπεράσματα των προηγούμενων διδακτικών ωρών προσαρμόζοντάς τα στα νέα δεδομένα.

Αναμένονται οι εξής περιπτώσεις:

Οι απαντήσεις να είναι διαισθητικές - εμπειρικές οπότε δεν έχει επιτευχθεί μαθηματικοποίηση.

Να περάσουν στο λογισμικό τα δεδομένα και με κατάλληλη μετατόπιση των δρομέων να πετύχουν τη συνάρτηση χωρίς να περάσουν από τη μαθηματική ερμηνεία των δρομέων και να δώσουν απάντηση στο ερώτημα προσεγγιστικά με τη βοήθεια του σχήματος. Θα έχουν επιτύχει εμπειρική λύση με δοκιμή και πείραμα.

Να περάσουν στο λογισμικό τα δεδομένα να προσεγγίσουν, να κατασκευάσουν τη νέα εξίσωση και χρησιμοποιώντας τον τύπο που εμφανίζεται με τη βοήθεια του λογισμικού, με αντικατάσταση σε αυτόν να βρουν τη θερμοκρασία του Απριλίου δίνοντας τιμή 4 για το x.

4η Διδακτική ώρα

Γίνεται η παρουσίαση των λύσεων από τις ομάδες, ακολουθεί αναστοχασμός και ψήφιση της βέλτιστης λύσης. Ενδεχομένως κάποιοι μαθητές να αναζητήσουν και στοιχεία για τον άνεμο αλλά οι μέσες θερμοκρασίες δε θα επιτρέψουν τη χρήση δείκτη ψυχρότητας. Η συζήτηση θα επιτρέψει τη χρήση της κατάλληλης συνάρτησης για την προσέγγιση των μέσων θερμοκρασιών. Μπορεί να αναδυθεί και το πρόβλημα της καταλληλότητας του μοντέλου από την άποψη ότι οι μέσες θερμοκρασίες και η πραγματικότητα μπορεί να διαφέρουν λόγω της δυναμικότητας του καιρού και των

συστημάτων καιρού μια δεδομένη χρονική στιγμή. Εδώ μπορεί αν προκύψει να γίνει μια συζήτηση του σφάλματος που θα προκύψει λόγω ότι ασχολήθηκαν με μεσοποιημένες καταστάσεις (κλιματολογία) και όχι με στοιχεία παρόντος καιρού. Ενδεχομένως να αποφασίσουν να δουλέψουν για την περιοχή τους (Κιλκίς) αναπροσαρμόζοντας το πρόβλημα παίρνοντας τόσο κλιματικά στοιχεία όσο και στοιχεία από προγνώσεις των τελευταίων ημερών. Τέλος, οι ομάδες συζητούν για τη μεταβλητή κόστος αποσκευών και τα ρούχα που μπορεί να φέρουν μαζί τους οι μαθητές (αγόρια ή κορίτσια).

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Commons, W. (2009). *Βιβλιάριο Μοντελοποίησης*.

Λεμονίδης, Χ. “*ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*” σημειώσεις μαθήματος στο πλαίσιο του Διατμηματικού - Διαπανεπιστημιακού Προγράμματος Μεταπτυχιακών Σπουδών «*ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ*» Μάιος 2016

Lesh, R., & Doerr, H.M. (2003). *Beyond Constructivism: A Models and Modeling Perspective on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching*, Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.