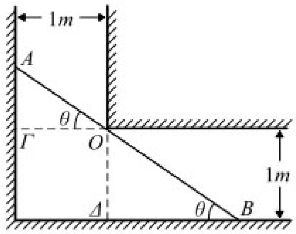
Αρχοντικό στην Καστοριά

ΓΙΟΥΡΣΗ ΙΩΑΝΝΑ (ΑΕΜ:596)
ΚΟΥΚΟΥΛΑΚΗ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟ (ΑΕΜ:568)
ΠΗΛΙΑΝΙΔΗ ΝΙΚΟΛΑΟ (ΑΕΜ: 584)
ΤΣΑΜΟΥΡΗ ΑΙΚΑΤΕΡΙΝΗ (ΑΕΜ: 590)

Το παρακάτω πρόβλημα/άσκηση προέρχεται από το σχολικό βιβλίο της Γ΄ Λυκείου στις Γενικές Ασκήσεις του 2ου κεφαλαίου (Διαφορικός Λογισμός) στη σελίδα 291 .

5. Δύο διάδρομοι πλάτους 1m τέμνονται κάθετα (Σχήμα). Να βρείτε το μεγαλύτερο δυνατό μήκος μιας σκάλας που μπορεί, αν μεταφερθεί οριζόντια, να στρίψει στη γωνία.



Υπόδειξη:

i) Να εκφράσετε τα ΟΑ, ΟΒ συναρτήσει της γωνίας θ, $0 < \theta < \pi/2$.

ii) Να αποδείξετε ότι $(AB) = \dfrac{1}{\eta\mu\theta} + \dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu\theta} = f(\theta)$.

iii) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ, για την οποία το ΑΒ γίνεται ελάχιστο.

Τροποποιούμε την παραπάνω άσκηση ώστε να μετατραπεί σε πρόβλημα μοντελοποίησης.

Πρόβλημα Μοντελοποίησης 2

Ανακαίνιση Αρχοντικού στην Καστοριά

Οι ιδιοκτήτες του Αρχοντικού Βέργουλα στην Καστοριά αποφάσισαν να ανακαινίσουν το Αρχοντικό το οποίο ήταν σχεδόν ετοιμόρροπο ύστερα από 150 περίπου χρόνια ζωής. Χτίστηκε περίπου το 1857, από ένα ονομαστό μάστορα εκείνης της εποχής, τον Α. Βέργουλα. Είναι ένα τριώροφο κτίριο, χτισμένο σε μία απότομη πλαγιά, έχοντας μία σταυρόσχημη σάλα και 4 οντάδες στη γωνία. Έτσι λοιπόν αποφάσισαν να «ντύσουν» με πέτρα το μεγαλύτερο μέρος του εξωτερικού του κτιρίου, τα τοιχία και τα πεζούλια προς το μέρος του δρόμου, καθώς και το δρόμο γύρω από το κτίριο. Για το λόγο αυτό χρειάζονταν μεγάλη ποσότητα από συγκεκριμένου είδους πέτρες. Η εταιρία που ανέλαβε τη μεταφορά λόγω του ότι είχε την έδρα της μακριά από την Καστοριά, επιθυμούσε να κάνει

μόνο ένα δρομολόγιο. Έτσι λοιπόν αποφασίστηκε η μεταφορά να γίνει με ένα τριαξονικό όχημα. Εκείνο που απασχόλησε τον υπεύθυνο της εταιρίας ήταν αν το όχημα θα μπορούσε να περάσει μέσα από τα στενά που οδηγούν στο χώρο του Αρχοντικού, δεδομένου ότι οι δρόμοι πλησίον του κτιρίου έχουν μικρό πλάτος. Ένα από τα προβλήματα που τους απασχόλησε, ήταν η ύπαρξη μιας διασταύρωσης, των δρόμων Αϊδήτρας και Παπαρέσκα. Μπόρεσε το τριαξονικό όχημα να περάσει από αυτήν την διασταύρωση; Τι θα προτείνατε στη Μεταφορική εταιρία;

Ηλεκτρονική διεύθυνση Αρχοντικού
http://www.arttravel.gr/proorismoi_europh_ellada_kastoria/article/13284/arxontiko-alexiou-bergoula

Το παραπάνω πρόβλημα μπορούμε να πούμε ότι προέρχεται και αυτό από τον πραγματικό κόσμο. Είναι ένα αρκετά ανοικτό πρόβλημα που δεν δίνει όλες τις πληροφορίες για τη λύση του. Οι διαστάσεις του φορτηγού σε συνδυασμό με το πλάτος των δρόμων οδηγούν σε διαφορετικά αποτελέσματα για το αν μπορεί το φορτηγό να περάσει το σταυροδρόμι. Η επιλογή που θα κάνει κάποιος για το αν οι δρόμοι έχουν ή όχι το ίδιο πλάτος επηρεάζει τη δυσκολία επίλυσης του προβλήματος. Οι μαθητές θα πρέπει να χρησιμοποιήσουν γνώσεις αριθμητικής γεωμετρίας, , άλγεβρας και ανάλυσης.

Μέθοδος Διδασκαλίας

Εισαγωγή ($1^{η}$ ώρα)

Στην πρώτη φάση θα έθετα το πλαίσιο εργασίας. Θα τους έλεγα τον τρόπο με τον οποίο θα εργαστούν. Στο μάθημα θα συνεργαστούν δύο εκπαιδευτικοί, ο μαθηματικός και ένας φυσικός. Ότι θα κάνουμε μία εισαγωγή στο πρόβλημα και θα δουλέψουν τόσο ομαδικά, όσο και ατομικά. Μάλιστα θα τόνιζα ότι είναι σημαντικό το τρίπτυχο «Σκέπτομαι – Συνεργάζομαι – Ανταλλάσσω απόψεις και γνώμες». Στη συνέχεια θα τους πρότεινα να χωριστούν σε ομάδες των τεσσάρων ατόμων τυχαία. Θα τους έδειχνα φωτογραφίες από τα αρχοντικά της Καστοριάς και θα τους προέτρεπα να μαζέψουν πληροφορίες για αυτά.

Φάση Εργασίας ($2^{η}$ ώρα)

Κατά τη διάρκεια αυτής της φάσης, Θα τους έδινα το πρόβλημα και θα τους προέτρεπα αρχικά να σκεφτούν μόνοι τους, ο καθένας ατομικά για 20 λεπτά. Θα τους προέτρεπα να αναφέρουν τους τρόπους που προτείνει ο καθένας (brainstorming) και να τους γράψουν κάτω, χωρίς όμως να τους σχολιάζουν. Στη συνέχεια, θα τους έδινα χρόνο να σκεφτούν ομαδικά. Οι δύο εκπαιδευτικοί θα γυρίζαμε μέσα στην τάξη, χωρίς όμως να βοηθάμε στη λύση του προβλήματος. Περισσότερο θα τους ενθαρρύναμε, ρωτώντας τους «τι έκαναν μέχρι τώρα» και «πώς σκέφτονται να συνεχίσουν». Θα κρατούσαμε κάποιες απόψεις τους που θα κρίναμε ότι αξίζει να ακουστούν αργότερα σε όλη την τάξη. Μετά το πέρασμα της ώρας θα τους δίναμε κάποια βοήθεια, όχι όμως λύση, όπως φαίνεται στον πίνακα 2 που ακολουθεί.

($3^{η}$ – $4^{η}$ ώρα)

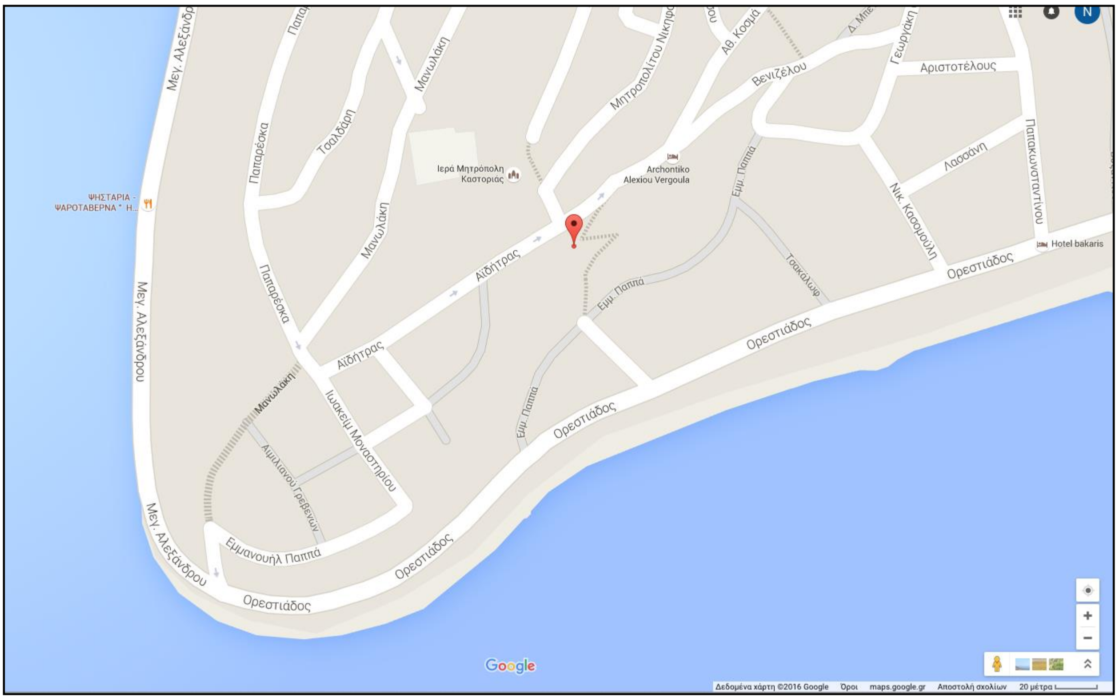
Θα συνέχιζαν την ομαδική συζήτηση και θα τους προέτρεπα να σκεφτούν τον τρόπο παρουσίασης της λύσης που σκέφτηκαν, στο πίνακα. Αργότερα, θα ξεκινούσαν την παρουσίαση της λύσης. Αντί να διατυπώνουμε σχόλια οι δύο εκπαιδευτικοί πάνω στην παρουσίαση, θα προτρέπαμε τις υπόλοιπες ομάδες να κάνουν σχόλια. Στο τέλος θα ακούγαμε όλες τις λύσεις, σχολιάζοντας τις συγκρουόμενες απόψεις που θα ακούγονταν. Αυτό μπορεί να συνεχιζόταν και την $4^{η}$ ώρα, αφού το πρόβλημα θεωρούμε ότι είναι ιδιαίτερα απαιτητικό, που σημαίνει ότι θα υπάρχει πολλή συζήτηση, τόσο πάνω στη μαθηματικοποίηση, όσο και στη φάση της επίλυσης του προβλήματος.

Τέλος, θα προτείναμε στους μαθητές να αναστοχαστούν στο σπίτι τις λύσεις που έδωσαν. Θα τους ζητούσαμε να γράψουν μία περίληψη πάνω στα σημεία στα οποία δυσκολεύθηκαν ή να θέσουν ερωτήσεις που τους απασχόλησαν, αλλά δε νοιώθουν ικανοποιημένοι από τις απαντήσεις που έδωσαν.

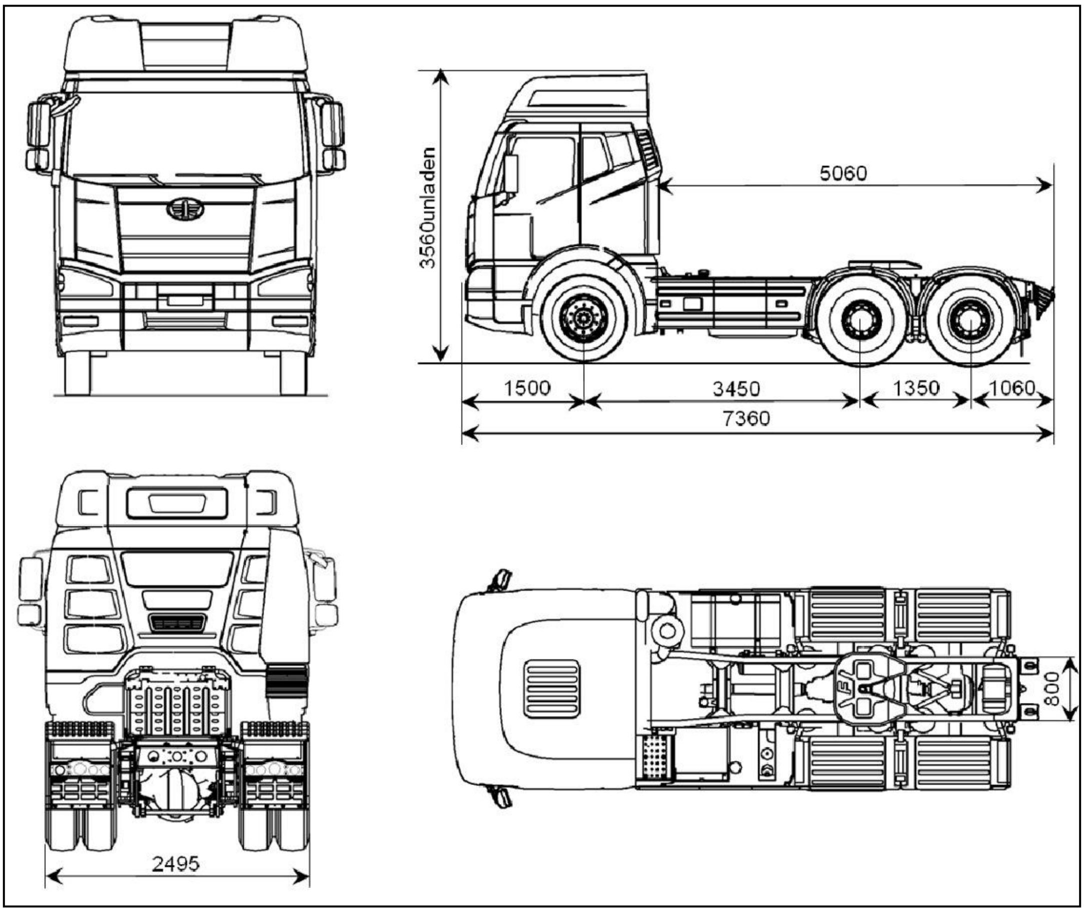
Πίνακας 2

(για πρόβλημα μοντελοποίησης 2)

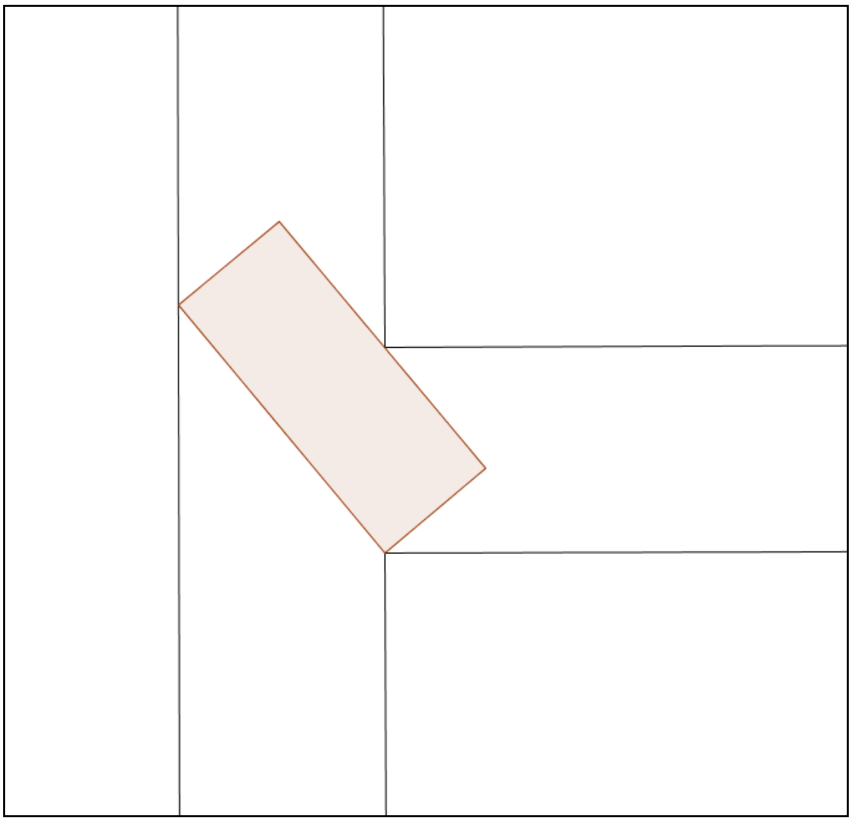
Πλάτος δρόμου	Ίδιο ή διαφορετικό πλάτος των δυο δρόμων	Χρήση χάρτη GoogleMaps
Τριαξονικό	Μήκος τριαξονικού	Πλάτος τριαξονικού

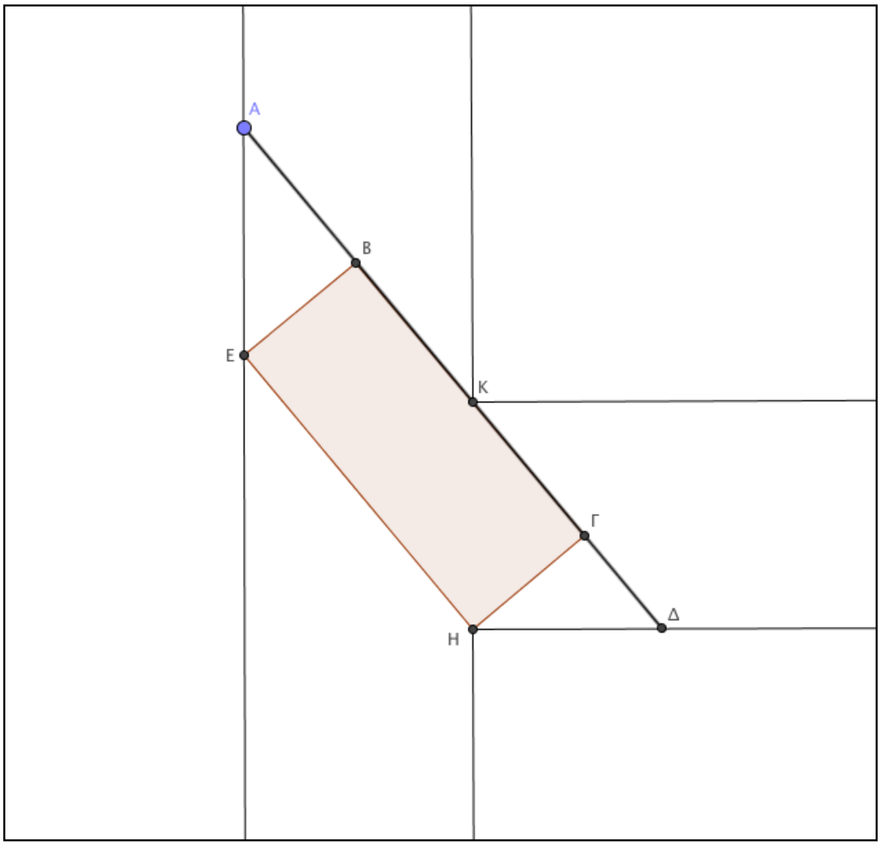


Μεγ. Αλεξάνδρου
Παπαρέσκα
Τσαλδάρη
Μανωλάκη
Μητροπολίτου Νικηφ
Αθ. Κοσμά
Βενιζέλου
Γεωργάκη
Αριστοτέλους
Ιερά Μητρόπολη Καστοριάς
Archontiko Alexiou Vergoula
Εμμ. Παππά
Λασσάνη
Παπακωνσταντίνου
Νικ. Κασομούλη
Hotel bakaris
Αϊδήτρας
Τσακάλωφ
Ορεστιάδος
Ιωακείμ Μοναστηρίου
Αιμιλιανού Γρεβενών
Εμμανουήλ Παππά
Google
Δεδομένα χάρτη ©2016 Google
Όροι
maps.google.gr
Αποστολή σχολίων
20 μέτρα

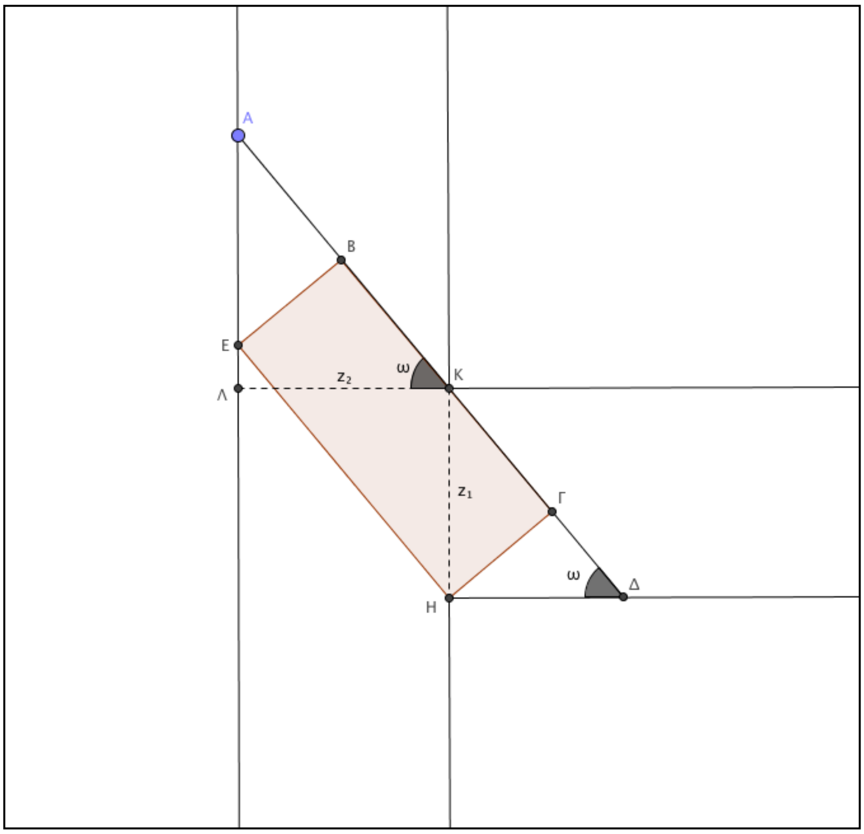


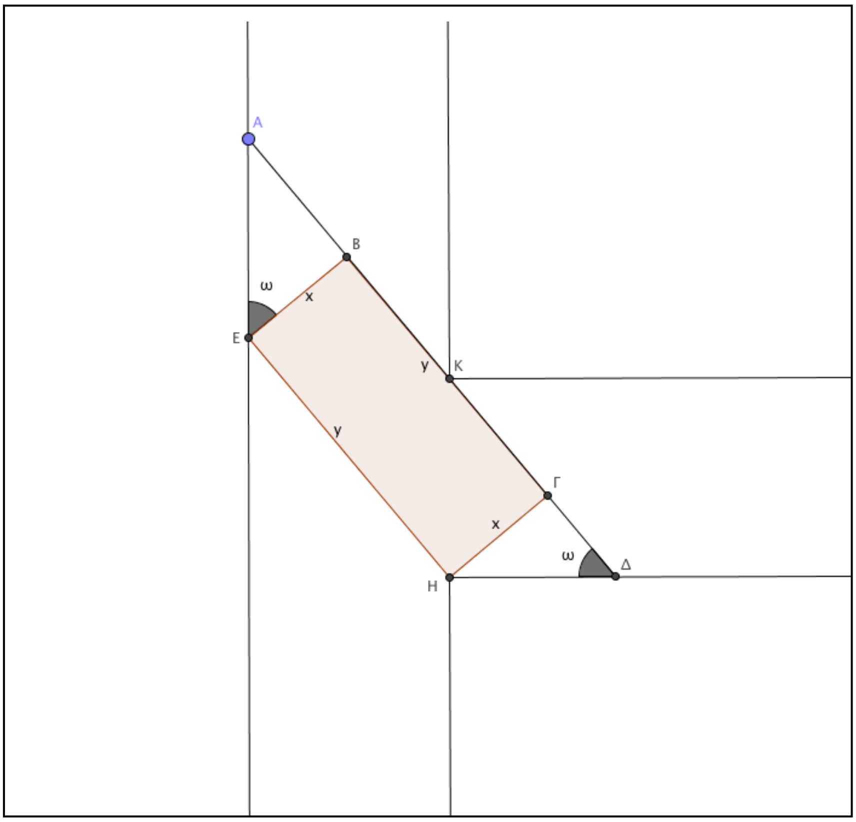
3560unladen
5060
1500
3450
1350
1060
7360
800
2495





Α
Β
Ε
Κ
Γ
Δ
Η


Α
Β
Ε
ω
Κ
Λ
z_2
z_1
Γ
ω
Δ
Η

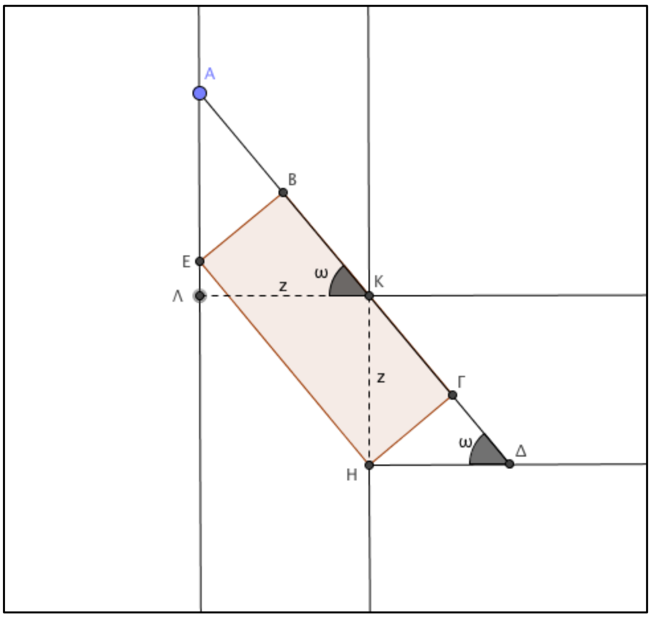

Α
Β
ω
x
Ε
y
Κ
y
Γ
x
ω
Δ
Η

Ενδεικτική προσέγγιση προβλήματος μοντελοποίησης 2

Η παρακάτω λύση είναι μια προσέγγιση του προβλήματος με τις γνώσεις επιπέδου Γ΄ Λυκείου. Η λύση που περιέχει και Φυσική χρειάζεται και πανεπιστημιακές γνώσεις οπότε και δε θα ασχοληθούμε.

Θα προσεγγίσουμε το πρόβλημα με δεδομένο ότι οι δυο δρόμοι έχουν το ίδιο πλάτος , δηλαδή $z_1=z_2=z$.

Από το σχήμα 1 έχουμε (σε σχέση με το πρόβλημα της σκάλας του προβλήματος του βιβλίου, όπου η σκάλα είναι το ΑΔ):



Σχήμα 1

Θα βρούμε το μέγιστο μήκος της σκάλας ΑΔ που μπορεί να περάσει συναρτήσει του z

Στο τρίγωνο ΑΛΚ έχουμε $\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{z}{AK} \Leftrightarrow AK = \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\omega}$

Στο τρίγωνο ΚΗΔ έχουμε $\eta\mu\omega = \frac{z}{K\Delta} \Leftrightarrow K\Delta = \frac{z}{\eta\mu\omega}$

Άρα $A\Delta = AK + K\Delta = \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{z}{\eta\mu\omega}$

Θεωρώ συνάρτηση $f(\omega) = \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\omega} + \frac{z}{\eta\mu\omega}$, με $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$f'(\omega) = -\frac{z}{\sigma\upsilon\nu^2\omega}(-\eta\mu\omega) - \frac{z}{\eta\mu^2\omega}\sigma\upsilon\nu\omega = z\left(\frac{\eta\mu^3\omega - \sigma\upsilon\nu^3\omega}{\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega}\right)$$

$$f'(\omega) = 0 \Leftrightarrow \; z\left(\frac{\eta\mu^3\omega - \sigma\upsilon\nu^3\omega}{\eta\mu^2\omega \cdot \sigma\upsilon\nu^2\omega}\right) = 0 \Leftrightarrow \eta\mu^3\omega = \sigma\upsilon\nu^3\omega \Leftrightarrow \varepsilon\varphi^3\omega = 1 \Leftrightarrow \omega = \frac{\pi}{4}$$

διότι $\omega \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

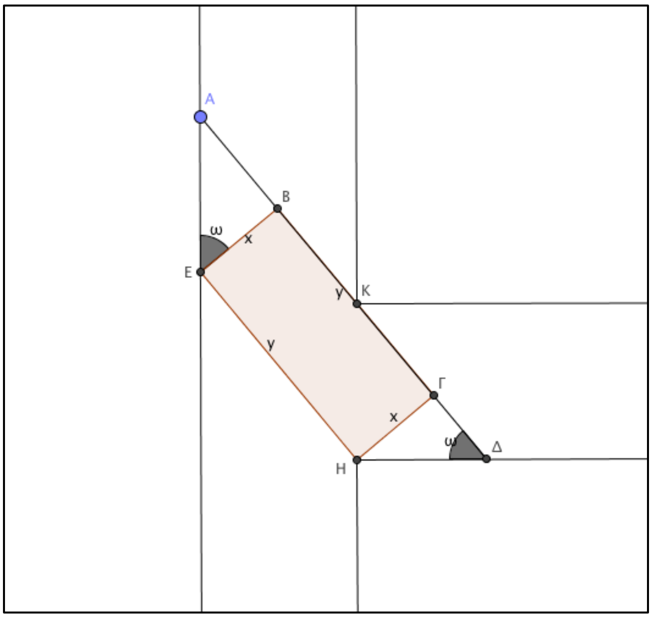
Η f′ είναι αρνητική στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$, ενώ η f′ είναι θετική στο διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

Όποτε η f παρουσιάζει ελάχιστο για $\omega = \frac{\pi}{4}$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{z}{\eta\mu\frac{\pi}{4}} + \frac{z}{\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}\,z$

Ελάχιστο μήκος ΑΚΔ είναι $2\sqrt{2}\,z$.   (1)

Άρα μέγιστο δυνατό μήκος της αντίστοιχης σκάλας που μπορεί να περάσει είναι $2\sqrt{2}\,z$.

Από το σχήμα 2 έχουμε (x το πλάτος του φορτηγού και y το μήκος του φορτηγού):



Σχήμα 2

Θα βρούμε το ΑΔ συναρτήσει των x και y

Στο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{AB}{x} \Leftrightarrow AB = x \cdot \varepsilon\varphi\omega$

Στο τρίγωνο ΓΗΔ έχουμε $\varepsilon\varphi\omega = \frac{x}{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \Gamma\Delta = \frac{x}{\varepsilon\varphi\omega}$

Άρα $A\Delta = AB + B\Gamma + \Gamma\Delta = x \cdot \varepsilon\varphi\omega + y + \frac{x}{\varepsilon\varphi\omega}$

Όμως το ΑΔ από (1) έχει ελάχιστο μήκος (δηλαδή μέγιστο δυνατό μήκος της αντίστοιχης σκάλας που μπορεί να περάσει) όταν $\omega = \frac{\pi}{4}$.

Άρα ελάχιστο μήκος (δηλαδή μέγιστο μήκος της σκάλας που μπορεί να περάσει) $A\Delta = x \cdot \varepsilon\varphi\frac{\pi}{4} + y + \frac{x}{\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}} = x + y + x = 2x + y$

Οπότε για να μπορεί λοιπόν να περάσει το φορτηγό θα πρέπει $2x + y \leq 2\sqrt{2}\, z$

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Commons, W. (2009). *Βιβλιάριο Μοντελοποίησης*.

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. (2012). *Μαθηματικά Γ τάξης Γενικού Λυκείου. Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*. Οργανισμός Εκδόσεων Διδακτικών Βιβλίων. http://doi.org/0220181012012

Βλάμος, Π., Δρούτσος, Π., Πρέσβης, Γ., Ρεκούμης, Κ. (2013). *Μαθηματικά Β΄Γυμνασίου*. Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών και Εκδόσεων: Διόφαντος.

Κλαουδάτος, Ν. (1992). Η Μοντελοποίηση στη Διδακτική Πράξη. Αθήνα: Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Λεμονίδης, Χ. Νικολαντωνάκης, Κ., Μ. Ε. (2011). Η Λύση Προβλημάτων Μοντελοποίησης σε Μαθητές ΣΤ΄Δημοτικού κα σε Μελλοντικούς Δασκάλους: Μια Μελέτη Περίπτωσης. In Πανεπιστήμιο Δυτικής Μακεδονίας (Ed.), *28ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας*.